Die Kollektivmasslehre (German Edition)

Czuber Emanuel

Die Kollektivmaßlehre

Von Hofrat E. Czuber

Professor der k. k. techn. Hochschule in Wien

Mit 5 Figuren im Text

Wien und Leipzig 1908 Kais. und kön. Hof-Buchdruckerei
und Hof-Verlags-Buchhandlung Carl Fromme

Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von

Lanefeind

JOSEF KOZÁK

k. und k. Oberst, zugeteilt dem Technischen Militärkomitee

Erster Band 15 Bogen Groß-Oktav

Mit 10 Textfiguren

Preis K 13.20 = M. 11.—

Herr Hofrat Professor Em. Czuber der k. k. Technischen Hochschule in Wien begutachtete das ihm vorgelegte Manuskript folgendermaßen:

„Das Werk zeichnet sich durch klare Anordnung des Stoffes und eine auf gründliches Verständnis hinzielende, sorgfältige und leichtverständliche Darstellung aus. Alle Entwicklungen sind in solcher Ausführlichkeit gegeben, daß sie ohne Zuziehung weiterer Behelfe verfolgt werden können. Durch die Einfügung einer größeren Zahl gut gewählter Beispiele ist der Erfassung der theoretischen Sätze vorgearbeitet, zugleich aber auch eine Anleitung zu praktischen Anwendungen gegeben. Durch die Veröffentlichung des Manuskriptes würde solchen Kreisen, die sich in den Gegenstand auf leichtem Wege einarbeiten wollen, ein Dienst erwiesen."

Der zweite Band erscheint im Laufe des Jahres 1908

Sonderabdruck aus den „Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens“,
Jahrgang 1907, zehntes Heft.

A.

Die Kollektivmaßlehre.

Nach einleitenden Vorlesungen von Hofrat Professor E. Czuber, gehalten an der k. k. Technischen Hochschule in Wien, zusammengestellt von Oberleutnant Alfred Strunz und Oberleutnant Karl Pietsch des k. u. k. Technischen Militärkomitees.

I. Einleitung.

Wenn wir die Naturobjekte, besonders jene organischer Natur, betrachten, so finden wir in ihren Merkmalen eine gewisse Stabilität. Diese bewirkt es, daß wir uns von jedem eine typische Vorstellung bilden. Diese Vorstellung wohnt uns inne, ohne daß wir sie genau präzisieren könnten.

Konkrete Beispiele mögen dies beleuchten. Wir besitzen eine typische Vorstellung von der Größe eines erwachsenen Menschen, ohne daß wir genau sagen könnten, worin diese Vorstellung besteht. Daß sie aber besteht, sehen wir daraus, daß wir nach ihr die Größe der Menschen beurteilen. Wir nennen einen Menschen klein oder groß, je nachdem er uns von der typischen Vorstellung, die wir uns gebildet haben, nach der einen oder anderen Seite abzuweichen scheint.

Starke Abweichungen von dem normalen Typus werden alle Menschen gleichartig konstatieren. Jeder wird einen Zwerg oder einen Riesen als solchen erkennen. Kleinere Abweichungen werden aber von verschiedenen Menschen verschieden beurteilt. Während der eine einen Menschen als groß bezeichnet, erkennt ihm der andere diese Eigenschaft noch nicht zu. Die typische Vorstellung ist daher bei verschiedenen Personen verschieden.

Ebenso haben wir uns eine typische Vorstellung von der menschlichen Hand gebildet, ohne daß wir die genauen Maße und Merkmale einer normalen Hand angeben könnten. Wir sprechen aber von einer schmalen oder einer breiten Hand, je nachdem das Verhältnis ihrer Länge zu ihrer Breite im Vergleich mit unserer Vorstellung von einer normalen Hand größer oder kleiner ist.

Weitere Beispiele werden die folgenden Betrachtungen bringen.

Einer der ersten, welcher Naturobjekte in Bezug auf ihre typische Erscheinung und die Abweichungen davon untersuchte, war der berühmte belgische Statistiker Quetelet. Er stellte diese Betrachtungen auch sofort auf den Boden, auf den sie gehören, auf den der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wenn wir ein einzelnes Objekt, ein Exemplar, z. B. einen Schmetterling, einen Menschen u. s. w. auf seine Merkmale hin betrachten, seien diese nun qualitativer oder quantitativer Natur, so können wir dies einzelne Exemplar nur beschreiben, wie es z. B. in einem Steckbrief geschieht. Zu einer wissenschaftlichen Forschung, welche irgend welche Resultate allgemeiner Natur liefern könnte, bietet sich keine Grundlage. Diese ergibt sich erst bei Betrachtung einer Vielheit von Naturobjekten.

Zu dieser Betrachtung ist es notwendig, daß alle derselben unterzogenen Exemplare gewisse Bedingungen erfüllen.

1. Sie müssen eine gewisse Gleichartigkeit aufweisen.
2. Die Betrachtung darf sich nur auf ein Merkmal beziehen.
3. Das Merkmal muß sich durch Zahlen ausdrücken lassen.

Eine solche Vielheit von Naturobjekten, die sich nach einem Merkmal statistisch ordnen lassen, hat man unter dem Namen Kollektivgegenstand in die Wissenschaft eingeführt. Der Name Kollektivgegenstand bezeichnet daher immer eine größere Anzahl von Natur- oder auch Kunstgegenständen. Die Anzahl m der Exemplare, die zu einem Kollektivgegenstande vereinigt werden, nennt man seinen Umfang.

Einem solchen Kollektivgegenstande gegenüber stellt die Kollektivmaßlehre die Frage, ob und auf welche Weise er sich mathematisch beschreiben lasse.

Diese Namengebung und Fragestellung rühren von Theodor Fechner her, der mit vollem Recht als Begründer der Kollektivmaßlehre zu gelten hat, wenn auch Quetelet bereits ähnliche Fragen spezieller Natur gestellt hat.

Die Gleichartigkeit der Exemplare erfordert, daß sie sich hinsichtlich ihrer anderen Merkmale, auf welche sie nicht geprüft werden, entweder vollständig gleichen oder doch bis zu einem bestimmten Grade übereinstimmen. Der Grad dieser Übereinstimmung ist von großer Bedeutung; denn es ist klar, daß man schwer einen Kollektivgegenstand von größerem Umfange erhält, wenn man für die übrigen Eigenschaften große Übereinstimmung verlangt. Je tiefer man mit der Forderung der Gleichartigkeit geht, desto leichter wird man einen Kollektivgegenstand von genügend großem Umfang finden. Fechner hat die Forderung aufgestellt, daß wenigstens die sogenannten Monstra, d. s. Objekte mit so abweichenden Merkmalen, daß sie aus dem typischen Rahmen offenbar herausfallen, ausgeschieden werden. Wenn man z. B. die Kopfumfänge von vielen Personen mißt, so vereinigt man diese Personen zu einem Kollektivgegenstand. Das Merkmal, nach welchem sie betrachtet werden, ist ihr Kopfumfang. Personen mit ganz ungewöhnlich großem oder kleinem Kopfumfang werden als Monstra ausgeschieden.

Die Ausscheidung der Monstra kann aber nicht schablonenmäßig erfolgen. Anders ist es, wenn man einen Kollektivgegenstand von nur wenig Exemplaren zur Verfügung hat, bei welchem die Einbeziehung der zufällig vorhandenen Monstra die Beobachtungsreihe über ihr Gewicht beeinflussen würde, anders, wenn ein Kollektivgegenstand von großem Umfange vorliegt. In diesem Falle ist es schwieriger zu entscheiden, ob man die Monstra, welche auf das Resultat der Beobachtung geringeren Einfluß üben, als zum Kollektivgegenstande gehörig betrachten soll oder nicht.

Ein weiteres Beispiel eines Kollektivgegenstandes, mit welchem sich Fechner viel beschäftigt hat, bildet die Körperlänge von Rekruten. Die Rekruten sind die Exemplare des Kollektivgegenstandes. Das Merkmal, auf welches hin sie betrachtet werden, ist ihre Körperlänge.

Die oben geforderte Gleichartigkeit in den übrigen Merkmalen zeigt sich hier in folgenden Umständen:

1. Ein bestimmtes Alter.
2. Gleiches Geschlecht.
3. Ein begrenzter Aushebungsbezirk, der eine Gleichartigkeit des Menschenschlages verbürgt.

Würde man Personen verschiedenen Alters, verschiedenen Geschlechtes, verschiedener Herkunft zu einem Kollektivgegenstande vereinigen, so erhielte man einen solchen von so ungleichartiger Beschaffenheit der Exemplare, daß die Untersuchung ihrer Körperlänge jede Bedeutung und jedes Interesse verlieren könnte.

Die Definition des Kollektivgegenstandes verlangt weiter, daß sich das Merkmal durch Zahlen ausdrücken lasse. Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn das Merkmal quantitativer Natur ist, daher durch Messung bestimmt werden kann. Bei manchen Kollektivgegenständen ist das Merkmal unmittelbar durch eine Zahl gegeben. Man zählt z. B. in einer Logarithmentafel auf 1 000 Seiten, wieviele Mantissen auf jeder

Seite mit 0 enden. Die Exemplare des Kollektivgegenstandes sind die einzelnen Seiten, das Merkmal, auf welches hin sie verglichen werden, bildet die Anzahl der Endnullen auf jeder Seite

II. Das Argument eines Kollektivgegenstandes. Stetige und unstetige Kollektivgegenstände.

Unter dem Argument eines Kollektivgegenstandes versteht man diejenige Größe, nach welcher die Exemplare statistisch geordnet werden. Es ist der zahlenmäßige, abgerundete Ausdruck für das betrachtete Merkmal, in der Folge konsequent mit x bezeichnet.

Das Argument ist daher für einen Kollektivgegenstand dasselbe, was die Variable für eine Funktion bedeutet.

Kann das Argument nur Werte annehmen, die nicht stetig aufeinanderfolgen, so nennt man den Kollektivgegenstand unstetig. In diesem Sinne ist der Kollektivgegenstand im letzten Beispiel unstetig, weil sein Argument, die Anzahl der Endnullen, eine unstetige Größe ist, die nur bestimmte Werte, ganze Zahlen, annehmen kann.

Wenn aber das Argument x wenigstens innerhalb bestimmter Grenzen, wenn auch nur theoretisch, aller Werte fähig ist, so bezeichnet man den Kollektivgegenstand als stetig.

Weil die mathematische Behandlung beider Fälle von einem gewissen Punkte an dieselbe ist, so werden sich die folgenden Betrachtungen nur auf stetige Kollektivgegenstände beschränken. Es ist übrigens nicht immer leicht zu entscheiden, ob ein vorliegender Kollektivgegenstand stetig oder unstetig ist.

Nennen wir z. B. die Anzahl der irgendwo vorkommenden Geburten g, die Zahl der männlichen m, die der weiblichen w. Es ist dann

$$g = m + w.$$

Das Verhältnis $\frac{m}{w} = x$ als Argument genommen scheint aller Werte fähig zu sein, da über die Anzahl g keine Annahme vorliegt.

Faßt man dagegen immer 100 Geburten zu einem Exemplare zusammen, so kann das Verhältnis $\frac{m}{g} = x'$ nur die Werte

$$0{,}00,\ 0{,}01,\ 0{,}02\ \ldots\ldots\ 1{,}00$$

annehmen, je nachdem unter den 100 Geburten keine, eine, zwei u. s. w. bis 100 männliche Geburten vorhanden sind. x' ist jetzt unstetig, es kann nur Werte zwischen 0 und 1, von Hundertel zu Hundertel steigend, annehmen.

Grenzen des Argumentes.

Ist das Argument des Kollektivgegenstandes unstetig, dann hat es mitunter von vornherein bestimmte Grenzen. Im obigen Beispiele ist die untere Grenze

$$u = 0,$$

die obere Grenze

$$o = 1;$$

im Beispiele der Abzählung der Endnullen auf den Seiten einer Logarithmentafel ist $u = 0$, wenn keine, $u = a$, wenn alle a Mantissen einer Seite mit 0 enden würden.

Bei stetigen Kollektivgegenständen, bis zu einem gewissen Grade auch bei unstetigen, lassen sich absolute Grenzen für das Argument nicht bestimmt angeben. Niemand kann z. B. scharfe Grenzen für die Körperlänge eines Menschen angeben. Betrachtet man einen Kollektivgegenstand von dem Umfange m, so wird man ein Exemplar mit der oberen Grenze o, eines mit der unteren Grenze u konstatieren, im obigen Beispiele den vorkommenden größten und kleinsten Menschen. o und u sind für diesen Fall die Grenzen des Argumentes.

Faßt man aus derselben Kategorie von Personen m' zu einem Kollektivgegenstande zusammen, so werden sich andere Grenzen des Argumentes o' und u' ergeben. Diese Grenzen werden wahrscheinlich weiter auseinander liegen, wenn $m' > m$ ist, enger sein, wenn $m' < m$ genommen wurde. Erst bei $m = \infty$ könnte man die wirklichen äußersten Grenzwerte feststellen. Dies ist aber praktisch unmöglich. Es unterliegt aber keinem Anstand, die Grenzen bis ∞ und $-\infty$ hinauszurücken, denn die sogenannten außermöglichen Fälle werden auch niemals konstatiert werden. Diese Annahme bringt daher für die analytische Behandlung der Kollektivgegenstände keinen Nachteil, ist aber für gewisse theoretische Folgerungen von Wichtigkeit.

Es gibt Kollektivgegenstände, die von mehreren Argumenten abhängig sind. Nehmen wir als Beispiel eine Anzahl von Eheschließungen. Die einzelne Ehe bildet das Exemplar. Die Ehen werden auf das Alter der Gatten bei der Eheschließung untersucht. Der Kollektivgegenstand besitzt also zwei Variable, das Alter des Mannes x und das Alter der Frau y.

Man kann auch hier den Kollektivgegenstand so behandeln, wie man sonst eine von zwei Variablen abhängige Funktion auf eine solche mit einer Variablen zurückführt. Man betrachtet zunächst alle Eheschließungen, bei welchen der männliche Teil ein bestimmtes Alter x_0 besitzt und forscht nach dem Alter der Frau. Alle diese Ehen bilden einen

Kollektivgegenstand für sich, abhängig von y. Durch Abstufung des x_0 löst man den Kollektivgegenstand mit zwei Variablen in eine Reihe von Kollektivgegenständen mit einer Variablen auf.

III. Erhebung eines Kollektivgegenstandes. Urliste.

Nach diesen Vorbegriffen wirft sich die Frage auf, was man erheben soll, um einen Kollektivgegenstand einer geregelten Forschung zu unterziehen.

Einen Kollektivgegenstand erheben heißt, für seine einzelnen Exemplare den Wert des ordnenden Argumentes feststellen. Das Erheben kann entweder aus dem bloßen Konstatieren des Wertes von x bestehen z. B. bei statistischen Erhebungen über das Alter von Personen auf Grund vorhandener Dokumente; oder in anderen Fällen in bloßem Abzählen, wie dies im Beispiel der Endnullen einer Logarithmentafel geschah. Ebenso hat man in neuerer Zeit vielfach als Kollektivgegenstand die Zahl der Blütenblätter zusammengesetzter Blüten benützt, da es sich zeigte, daß die Natur nur bei einfachen Blüten Regelmäßigkeit walten läßt. Auch hier bestand das Erheben des Kollektivgegenstandes in bloßem Abzählen.

Die wichtigste Art der Erhebung eines Kollektivgegenstandes bildet aber das Messen. Das Argument wird durch Messungen an den einzelnen Exemplaren erhalten: die Körperlänge, der Kopfumfang, das Gewicht des Gehirnes u. s. w.

Das Ergebnis der Erhebungen muß wie alle statistischen Erhebungen tabellarisiert werden. Diese einfache Tabelle nennt man die Urliste.

Schema einer Urliste.

Nummer des Exemplares	Am Exemplar konstatiertes x

Die Urliste läßt noch kein Gesetz erkennen, man wäre denn schon bei der Erhebung nach einer Regel vorgegangen. Dies wäre etwa der Fall, wenn man Messungen der Körperlänge von Personen nach deren annähernden Größe vorgenommen hätte.

IV. Die primäre Verteilungstafel.

Die Urliste muß erst weiter verarbeitet werden, ehe sie zu weiteren Untersuchungen benützt werden kann.

Es liege ein stetiger Kollektivgegenstand vor, dessen Erhebung durch Messen mit einem Maßstabe geschehen sei, z. B. Messen der Körperlänge. Der Maßstab hätte die Einheit $E = 1 cm$. Man konstatiert die Körperlänge immer in vollen Zentimetern. In diesem Falle werden die Exemplare, welche unter ein Argument x_0 zählen, d. h. eine bestimmte Körperlänge von x_0 Zentimeter aufweisen, nicht untereinander gleich sein. Ihre wirklichen Argumente bewegen sich zwischen den Grenzen $x_0 + \frac{1}{2} cm$ und $x_0 - \frac{1}{2} cm$, allgemein zwischen $x_0 + \frac{E}{2}$ und $x_0 - \frac{E}{2}$. Man faßt sie aber alle unter das Argument x_0 zusammen. Diesen Vorgang nennt man die Abrundung des Argumentes. Bei genauen Messungen wählt man E klein, bei ungenaueren groß.

Ordnet man die so zu Gruppen vereinigten Exemplare nach ihren Argumenten vom kleinsten beginnend in eine Tabelle, so erhält man die primäre Verteilungstafel, wie sie in ausführlicherer Form, als sie die Praxis verwendet, folgt:

Primäre Verteilungstafel.

Argumentwert x	Argumentintervall $x - \frac{E}{2}$ bis $x + \frac{E}{2}$	Anzahl der Exemplare z	Relative Häufigkeit der Exemplare y
x_0	$x_0 - \frac{E}{2}$ bis $x_0 + \frac{E}{2}$	z_0	y_0
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x_i	$x_i - \frac{E}{2}$ bis $x_i + \frac{E}{2}$	z_i	y_i
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x_g	$x_g - \frac{E}{2}$ bis $x_g + \frac{E}{2}$	z_g	y_g
	Summe . .	m	1

Nach dieser Tafel bewegt sich das Argument zwischen den Grenzwerten $x_0 - \frac{E}{2}$ und $x_g + \frac{E}{2}$. Aus praktischen Gründen geht man oft