

---

**V. Puiseux'S Untersuchungen Über Die Algebraischen  
Functionen (German Edition)**

**Fischer Hermann**

---

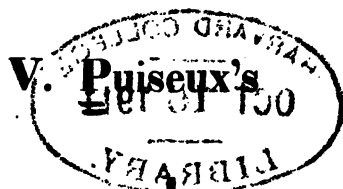
**Title: V. Puiseux'S Untersuchungen Über Die Algebraischen Functionen (German Edition)**

**Author: Fischer Hermann**

**This is an exact replica of a book. The book reprint was manually improved by a team of professionals, as opposed to automatic/OCR processes used by some companies. However, the book may still have imperfections such as missing pages, poor pictures, errant marks, etc. that were a part of the original text. We appreciate your understanding of the imperfections which can not be improved, and hope you will enjoy reading this book.**







# Untersuchungen

726

über die

## algebraischen Functionen,

dargestellt

von

**Hermann Fischer.**

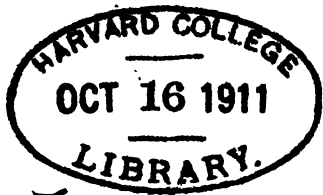
Mit 29 Holzschnitten.

**Halle.**

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1861.

Math <sup>3628.61</sup>  
~~3608.61~~



*Farrar fund*

Herrn

**Bernhard Emil Böttcher,**

Doctor der Medizin und praktischem Arzte,

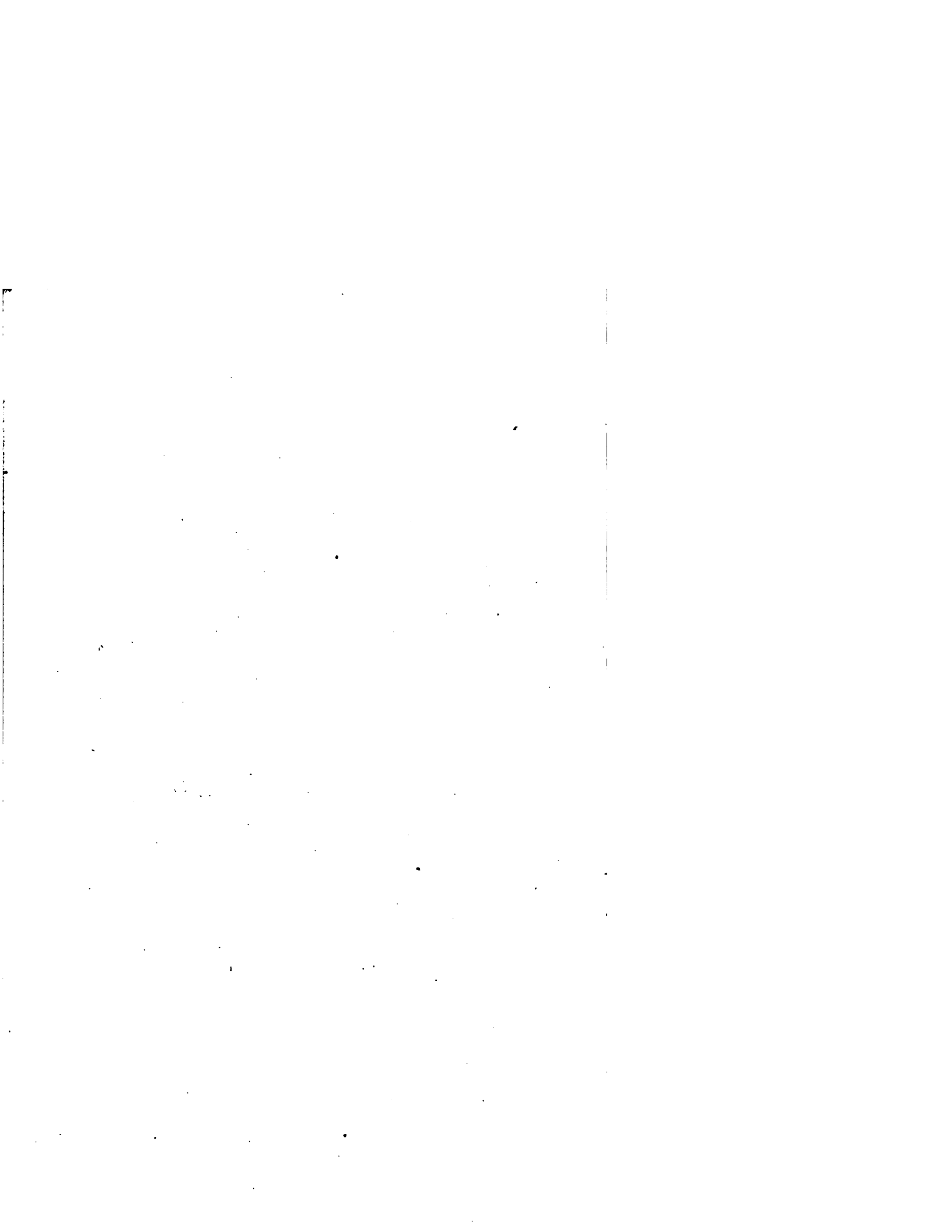
aus

**innigster Freundschaft**

gewidmet

von

**Hermann Fischer.**



## Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen, welche Herr *Puiseux* in *Liouville's Journal de Mathématiques pures et appliquées*, T. XV und XVI in den Jahren 1850 und 1851 veröffentlicht hat, bilden für das Studium der höhern Zweige der reinen Mathematik, wie der mathematischen Physik eine vielumfassende Grundlage und sind insbesondere dadurch ausgezeichnet, dass überall von der so lichtvollen geometrischen Methode, deren Entstehung wir der durch *Gauss* \*) eingeführten Darstellungsweise complexer Größen verdanken, Gebrauch gemacht wird. Ich habe mich daher veranlasst gesehen, diese wichtigen und interessanten Untersuchungen den jüngern Freunden der mathematischen Analysis, welche auf dem ausgedehnten Gebiete derselben bereits zu den Elementen der Integralrechnung vorgeschritten sind, in deutscher Bearbeitung vorzulegen und darf vielleicht hoffen, dass dieses Schriftchen Manchem nicht unerwünscht sein wird.

Den gegenwärtigen Betrachtungen liegt der Begriff der Continuität der complexen Functionen zu Grunde (Nr. 1—7), wofür *Cauchy* sowol die allgemeine Definition\*\*), als auch den tatsächlichen Beweis\*\*\*) gegeben hat. Denkt man sich in der Ebene

---

\*) *Göttinger Gelehrten Anzeigen* vom Jahre 1831, Stück 64.

\*\*) *Comptes rendus*, année 1846; T. XXIII, p. 700.

\*\*\*) *Exercices d'Analyse et de physique mathématique*; Paris 1840; T. II, p. 100.



einen Punkt  $P$  auf rechtwinklige Coordinaten-Axen bezogen, die Axe des Reellen und die des Imaginären, und nimmt in Bezug auf jene die Coordinate  $a$ , in Bezug auf diese die Coordinate  $b$  an, so wird dem Punkte  $P$  die complexe Grösse  $a + bi$  zuertheilt. Auf diese Weise entspricht jedem Punkte der Ebene eine complexe Grösse, und umgekehrt lässt sich jede complexe Grösse als Punkt versinnlichen. Wie man mit den Punkten, welche complexen Zahlen entsprechen, die arithmetischen Operationen vornehmen kann, wie man also Punkte zu finden vermag, deren Werthe der Summe, Differenz, u. s. w. anderer durch gegebene Punkte dargestellter Werthe gleich sind; welche Curven \*) durch gegebenen Functionen von  $z$  zugehörige Punkte beschrieben werden, sobald man den  $z$  entsprechenden Punkt  $Z$  auf bestimmten Curven fortführt; welche Punkte den Ableitungen gegebener Functionen zukommen u. s. f., hat Herr Siebeck ausführlich darge- than\*\*). Denkt man sich nun die complexe Grösse  $z$  variabel, so kann der zugehörige Punkt  $Z$  jede Stelle der Ebene durchlaufen, so dass die Ebene als der geometrische Ort der complexen Grösse  $z$  anzusehen ist. Da man immer den Radiusvector  $r$  eines Punktes  $Z$  als Function eines Winkels  $t$ , welchen derselbe mit der  $x$ -Axe bildet, betrachten kann, so lässt sich auch  $z$  als eine continuirliche Function  $\varphi(t)$  von der reellen Grösse  $t$  auffassen, und zwar als eine complexe Function von der Beschaffenheit, dass  $z = z_1$  für  $t = t_1$  und  $z = z_2$  für  $t = t_2$  wird; alsdann wird  $\varphi(t_1)$  einem Punkte  $Z_1$  und  $\varphi(t_2)$  einem Punkte  $Z_2$  entsprechen, ferner während  $t$  von  $t_1$  bis  $t_2$  continuirlich wächst, die complexe Grösse  $\varphi(t)$  oder  $z$  auf einer gewissen durch  $\varphi(t)$  vollständig bestimmten Curve vom Punkte  $Z_1$  zu dem Punkte  $Z_2$  continuirlich übergehen. Auch der Function  $u = f(z)$  wird ein Punkt  $U$  der Ebene entspre-

\*) Unter *Curve* ist hier überhaupt der Weg zu verstehen, welchen ein Punkt durchläuft.

\*\*) *Crelle's Journal für die Mathematik*, Bd. 55, S. 221.

chen, welcher mit  $Z$  seine Lage ändert und zwar in derjenigen Beziehung zu  $Z$  steht, die sich in der Function  $f(x)$  selbst ausspricht; desgleichen wird  $f(x_1)$  dem Punkte  $U_1$  und  $f(x_2)$  dem Punkte  $U_2$  zugehören. Da die Function  $\varphi(t)$  hier ganz willkürlich angenommen war, so kann man sich eben sowol eine andere Function  $z = \chi(t)$  denken, für welche  $\chi(t_1) = x_1$  und  $\chi(t_2) = x_2$  ist, also, wenn wieder die Veränderung von  $z$  bloss durch die Veränderung der Grösse  $t$  bedingt ist, den Punkt  $Z$  während des Wachsens von  $t_1$  bis  $t_2$  auch auf einer andern Curve von  $Z_1$  zu  $Z_2$  übergehen lassen, und gleichzeitig wird dann  $U$  ebenfalls auf einer andern Curve als vorhin von  $U_1$  nach  $U_2$  gelangen. Somit gibt es einerseits unendlich viele Curven, auf denen  $Z$  durch Veränderung der Grösse  $z$  von  $Z_1$  zu  $Z_2$ , und andererseits auch unendlich viele Curven, auf denen  $U$  von  $U_1$  zu  $U_2$  übergehen kann.

Der Begriff eines zwischen imaginären Grenzen genommenen Integrals und der Sinn der Vieldeutigkeit desselben ist zuerst von Cauchy\*) dargelegt worden. Wie für den Fall, dass  $u = f(x)$  und  $x$  nur reelle Werthe durchlaufen, das Integral

$$\int_a^b f(x) dx,$$

definiert wird durch die Summe:

$$f(a)dx + f(a+dx)dx + f(a+2dx)dx + \dots + f(b-dx)dx + f(b)dx,$$

so soll hier ganz entsprechend das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x) dx,$$

wenn die den Werthen  $x_1, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots, x_2$  zugehörigen Punkte auf dem Wege von  $Z$  in sehr kleinen Abständen auf einander folgen, durch die Summe:

$$f(x_1)(\zeta - x_1) + f(\zeta)(\zeta_1 - \zeta) + f(\zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_1) + \dots + f(x_2)(x_2 - \zeta_n)$$

definiert werden, wo  $x_1, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, x_2$  und  $f(x_1), f(\zeta),$

\*) *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris 1826.*

$f(\zeta_1), \dots, f(z_2)$  complexe Functionen von der reellen Grösse  $t$  sind. Setzt man nun hierin:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 i, \\ \zeta &= \xi + \eta i, \\ \zeta_1 &= \xi_1 + \eta_1 i, \\ &\dots \\ z_2 &= x_2 + y_2 i, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos t_1 = \varphi_1(t_1), & y_1 &= r_1 \sin t_1 = \varphi_2(t_1), \\ \xi &= \rho \cos \tau = \varphi_1(\tau), & \eta &= \rho \sin \tau = \varphi_2(\tau), \\ \xi_1 &= \rho_1 \cos \tau_1 = \varphi_1(\tau_1), & \eta_1 &= \rho_1 \sin \tau_1 = \varphi_2(\tau_1), \\ &\dots & & \dots \\ x_2 &= r_2 \cos t_2 = \varphi_1(t_2), & y_2 &= r_2 \sin t_2 = \varphi_2(t_2) \end{aligned}$$

reelle Functionen von  $t$  sind, während alsdann

$$\begin{aligned} f(z_1) &= f_1(t_1) + i f_2(t_1), \\ f(\zeta) &= f_1(\tau) + i f_2(\tau), \\ f(\zeta_1) &= f_1(\tau_1) + i f_2(\tau_1), \\ &\dots \\ f(z_2) &= f_1(t_2) + i f_2(t_2) \end{aligned}$$

wird, wo  $f_1$  und  $f_2$  gleichfalls reelle Functionen von  $t$  bezeichnen, so ergibt die vorstehende Summe folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \\ &\{ [f_1(t_1)(\xi - x_1) + f_1(\tau)(\xi_1 - \xi) + \dots] - [f_2(t_1)(\eta - y_1) + f_2(\tau)(\eta_1 - \eta) + \dots] \} \\ &+ i \{ [f_1(t_1)(\eta - y_1) + f_1(\tau)(\eta_1 - \eta) + \dots] + [f_2(t_1)(\xi - x_1) \\ &+ f_2(\tau)(\xi_1 - \xi) + \dots] \} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ f_1(t) \frac{d\varphi_1(t)}{dt} - f_2(t) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right] dt \\ &+ i \int_{t_1}^{t_2} \left[ f_1(t) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} + f_2(t) \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \right] dt. \end{aligned}$$

Somit ist das Integral von einer complexen Grösse mit Hilfe der

ähnlichen Darstellung des Imaginären eben so als complexe Grösse zweier reellen Integrale definiert, wie es die directe Ausführung des Ausdrucks

$$\int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) + if_2(t)] \left[ \frac{d\varphi_1(t)}{dt} + i \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right] dt$$

mit sich bringt. Selbiges wird daher durch einen Punkt dargestellt, welcher durch successive Construction der Punkte, die der obigen Summe angehören, gewonnen werden kann.

Es ist aber zu untersuchen, ob man durch die Bildung dieser Summe für die Fortbewegung des Punktes  $Z$  von  $Z_1$  nach  $Z_2$  auf andern Curven denselben Punkt, oder neue Punkte erlangen wird, und wie im letztern Falle die neuen Punkte zu jenem liegen werden; d. h. ob der Ausdruck:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ f_1(t) \frac{dx_1(t)}{dt} - f_2(t) \frac{dx_2(t)}{dt} \right] dt$$

$$+ i \int_{t_1}^{t_2} \left[ f_1(t) \frac{dx_2(t)}{dt} + f_2(t) \frac{dx_1(t)}{dt} \right] dt.$$

wo

$$z = x(t) = x_1(t) + ix_2(t),$$

$$f(z) = f_1(t) + if_2(t)$$

ist, immer denselben Werth hat, in welcher Weise man sich auch  $z$  von  $t$  abhängig denken mag, wofern nur  $z = z_1$  für  $t = t_1$  und  $z = z_2$  für  $t = t_2$  ist, oder ob dieser mehrere Werthe zulässt, und in welchem Zusammenhange dieselben unter einander stehen.

Wir werden uns gleich von der Gültigkeit des folgenden Satzes überzeugen:

Wenn  $f(z)$  eine continuirliche Function von  $z$  bezeichnet, welche für keinen endlichen Werth von  $z$  unendlich wird, und wenn es eine stetige Function