V. Puiseux'S Untersuchungen Über Die Algebraischen Functionen (German Edition)

Fischer Hermann

V. Puiseux's

Untersuchungen

über die

algebraischen Functionen,

dargestellt

von

Hermann Fischer.

Mit 29 Holzschnitten.

Halle.

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1861.

Herrn

Bernhard Emil Bötticher,

Doctor der Medizin und praktischem Arzte,

aus

innigster Freundschaft

gewidmet

von

Hermann Fischer.

Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen, welche Herr Puiseux in Liouville's *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, T. XV und XVI in den Jahren 1850 und 1851 veröffentlicht hat, bilden für das Studium der höhern Zweige der reinen Mathematik, wie der mathematischen Physik eine vielumfassende Grundlage und sind insbesondere dadurch ausgezeichnet, dass überall von der so lichtvollen geometrischen Methode, deren Entstehung wir der durch Gauss*) eingeführten Darstellungsweise complexer Grössen verdanken, Gebrauch gemacht wird. Ich habe mich daher veranlasst gesehen, diese wichtigen und interessanten Untersuchungen den jüngern Freunden der mathematischen Analysis, welche auf dem ausgedehnten Gebiete derselben bereits zu den Elementen der Integralrechnung vorgeschritten sind, in deutscher Bearbeitung vorzulegen und darf vielleicht hoffen, dass dieses Schriftchen Manchem nicht unerwünscht sein wird.

Den gegenwärtigen Betrachtungen liegt der Begriff der Continuität der complexen Functionen zu Grunde (Nr. 1—7), wofür Cauchy sowol die allgemeine Definition**), als auch den thatsächlichen Beweis***) gegeben hat. Denkt man sich in der Ebene

---

*) *Göttinger Gelehrten Anzeigen* vom Jahre 1831, Stück 64.

**) *Comptes rendus*, année 1846; T. XXIII, p. 700.

***) *Exercices d'Analyse et de physique mathématique*; Paris 1840; T. II, p. 109.

einen Punkt P auf rechtwinklige Coordinaten-Axen bezogen, die Axe des Reellen und die des Imaginären. und nimmt in Bezug auf jene die Coordinate a, in Bezug auf diese die Coordinate b an, so wird dem Punkte P die complexe Grösse $a+bi$ zuertheilt. Auf diese Weise entspricht jedem Punkte der Ebene eine complexe Grösse, und umgekehrt lässt sich jede complexe Grösse als Punkt versinnlichen. Wie man mit den Punkten, welche complexen Zahlen entsprechen, die arithmetischen Operationen vornehmen kann, wie man also Punkte zu finden vermag, deren Werthe der Summe, Differenz, u. s. w. anderer durch gegebene Punkte dargestellter Werthe gleich sind; welche Curven *) durch gegebenen Functionen von z zugehörige Punkte beschrieben werden, sobald man den z entsprechenden Punkt Z auf bestimmten Curven fortführt; welche Punkte den Ableitungen gegebener Functionen zukommen u. s. f., hat Herr Siebeck ausführlich dargethan **). Denkt man sich nun die complexe Grösse z variabel, so kann der zugehörige Punkt Z jede Stelle der Ebene durchlaufen, so dass die Ebene als der geometrische Ort der complexen Grösse z anzusehen ist. Da man immer den Radiusvector r eines Punktes Z als Function eines Winkels t, welchen derselbe mit der x-Axe bildet, betrachten kann, so lässt sieh auch z als eine continuirliche Function $\varphi(t)$ von der reellen Grösse t auffassen, und zwar als eine complexe Function von der Beschaffenheit, dass $z=z_1$ für $t=t_1$ und $z=z_2$ für $t=t_2$ wird; alsdann wird $\varphi(t_1)$ einem Punkte Z_1 und $\varphi(t_2)$ einem Punkte Z_2 entsprechen, ferner während t von t_1 bis t_2 continuirlich wächst, die complexe Grösse $\varphi(t)$ oder z auf einer gewissen durch $\varphi(t)$ vollständig bestimmten Curve vom Punkte Z_1 zu dem Punkte Z_2 continuirlich übergehen. Auch der Function $u=f(z)$ wird ein Punkt U der Ebene entspre-

*) Unter *Curve* ist hier überhaupt der Weg zu verstehen, welchen ein Punkt durchläuft.

**) Crelle's *Journal für die Mathematik*, Bd. 55, S. 221.

chen, welcher mit Z seine Lage ändert und zwar in derjenigen Beziehung zu Z steht, die sich in der Function $f(z)$ selbst ausspricht; desgleichen wird $f(z_1)$ dem Punkte U_1 und $f(z_2)$ dem Punkte U_2 zugehören. Da die Function $\varphi(t)$ hier ganz willkürlich angenommen war, so kann man sich eben sowol eine andere Function $z = \chi(t)$ denken, für welche $\chi(t_1) = z_1$ und $\chi(t_2) = z_2$ ist, also, wenn wieder die Veränderung von z bloss durch die Veränderung der Grösse t bedingt ist, den Punkt Z während des Wachsens von t_1 bis t_2 auch auf einer andern Curve von Z_1 zu Z_2 übergehen lassen, und gleichzeitig wird dann U ebenfalls auf einer andern Curve als vorhin von U_1 nach U_2 gelangen. Somit gibt es einerseits unendlich viele Curven, auf denen Z durch Veränderung der Grösse z von Z_1 zu Z_2, und andererseits auch unendlich viele Curven, auf denen U von U_1 zu U_2 übergehen kann.

Der Begriff eines zwischen imaginären Grenzen genommenen Integrals und der Sinn der Vieldeutigkeit desselben ist zuerst von Cauchy*) dargelegt worden. Wie für den Fall, dass $u = f(z)$ und z nur reelle Werthe durchlaufen, das Integral

$$\int_a^b f(z)dz,$$

definirt wird durch die Summe:

$$f(a)dz + f(a+dz)dz + f(a+2dz)dz + \ldots + f(b-dz)dz + f(b)dz,$$

so soll hier ganz entsprechend das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz,$$

wenn die den Werthen $z_1, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots z_2$ zugehörigen Punkte auf dem Wege von Z in sehr kleinen Abständen auf einander folgen, durch die Summe:

$$f(z_1)(\zeta - z_1) + f(\zeta)(\zeta_1 - \zeta) + f(\zeta_1)(\zeta_2 - \zeta_1) + \ldots + f(z_2)(z_2 - \zeta_n)$$

definirt werden, wo $z_1, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, z_2$ und $f(z_1), f(\zeta),$

---

*) *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris* 1825.

$f(\zeta_1), \ldots, f(z_2)$ complexe Functionen von der reellen Grösse t sind. Setzt man nun hierin:

$$z_1 = x_1 + y_1 i,$$
$$\zeta = \xi + \eta i,$$
$$\zeta_1 = \xi_1 + \eta_1 i,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$z_2 = x_2 + y_2 i,$$

wo

$$x_1 = r_1 \cos t_1 = \varphi_1(t_1), \quad y_1 = r_1 \sin t_1 = \varphi_2(t_1),$$
$$\xi = \varrho \cos \tau = \varphi_1(\tau), \quad \eta = \varrho \sin \tau = \varphi_2(\tau),$$
$$\xi_1 = \varrho_1 \cos \tau_1 = \varphi_1(\tau_1), \quad \eta_1 = \varrho_1 \sin \tau_1 = \varphi_2(\tau_1),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_2 = r_2 \cos t_2 = \varphi_1(t_2), \quad y_2 = r_2 \sin t_2 = \varphi_2(t_2)$$

reelle Functionen von t sind, während alsdann

$$f(z_1) = f_1(t_1) + i f_2(t_1),$$
$$f(\zeta) = f_1(\tau) + i f_2(\tau),$$
$$f(\zeta_1) = f_1(\tau_1) + i f_2(\tau_1),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(z_2) = f_1(t_2) + i f_2(t_2)$$

wird, wo f_1 und f_2 gleichfalls reelle Functionen von t bezeichnen, so ergibt die vorstehende Summe folgende Gleichung:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz =$$
$$\left\{[f_1(t_1)(\xi - x_1) + f_1(\tau)(\xi_1 - \xi) + \ldots] - [f_2(t_1)(\eta - y_1) + f_2(\tau)(\eta_1 - \eta) + \ldots]\right\}$$
$$+ i\left\{[f_1(t_1)(\eta - y_1) + f_1(\tau)(\eta_1 - \eta) + \ldots] + [f_2(t_1)(\xi - x_1) + f_2(\tau)(\xi_1 - \xi) + \ldots]\right\}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[f_1(t) \frac{d\varphi_1(t)}{dt} - f_2(t) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right] dt$$
$$+ i \int_{t_1}^{t_2} \left[f_1(t) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} + f_2(t) \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \right] dt.$$

Somit ist das Integral von einer complexen Grösse mit Hilfe der sinnlichen Darstellung des Imaginären eben so als complexe Grösse zweier reellen Integrale definirt, wie es die directe Ausführung des Ausdrucks

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[f_1(t)+if_2(t)\Big]\Big[\frac{d\varphi_1(t)}{dt}+i\frac{d\varphi_2(t)}{dt}\Big]dt$$

mit sich bringt. Selbiges wird daher durch einen Punkt dargestellt, welcher durch successive Construction der Punkte, die der obigen Summe angehören, gewonnen werden kann.

Es ist aber zu untersuchen, ob man durch die Bildung dieser Summe für die Fortbewegung des Punktes Z von Z_1 nach Z_2 auf andern Curven denselben Punkt, oder neue Punkte erlangen wird, und wie im letztern Falle die neuen Punkte zu jenem liegen werden; d. h. ob der Ausdruck:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[\mathfrak{f}_1(t)\frac{d\chi_1(t)}{dt}-\mathfrak{f}_2(t)\frac{d\chi_2(t)}{dt}\Big]dt$$

$$+i\int_{t_1}^{t_2}\Big[\mathfrak{f}_1(t)\frac{d\chi_2(t)}{dt}+\mathfrak{f}_2(t)\frac{d\chi_1(t)}{dt}\Big]dt,$$

wo

$$z=\chi(t)=\chi_1(t)+i\chi_2(t),$$
$$f(z)=\mathfrak{f}_1(t)+i\mathfrak{f}_2(t)$$

ist, immer denselben Werth hat, in welcher Weise man sich auch z von t abhängig denken mag, wofern nur $z=z_1$ für $t=t_1$ und $z=z_2$ für $t=t_2$ ist, oder ob dieser mehrere Werthe zulässt, und in welchem Zusammenhange dieselben unter einander stehen.

Wir werden uns gleich von der Gültigkeit des folgenden Satzes überzeugen:

Wenn $f(z)$ eine continuirliche Function von z bezeichnet, welche für keinen endlichen Werth von z unendlich wird, und wenn es eine stetige Function