СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

ГЕОМЕТРИЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

АЛГЕБРА

ЧИСЛА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Действительные числа

<table>
<tr>
<td>Натуральные числа
Числа, которые используются для счета предметов: 1, 2, 3, ... $N=\{1; 2; 3; \dots\}$ — множество натуральных чисел</td>
<td>Целые числа
Натуральные числа 1, 2, 3, ..., противоположные им числа –1, –2, –3, ... и число 0 образуют множество целых чисел.
$Z=\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ — множество целых чисел</td>
</tr>
<tr>
<td>Рациональные числа
Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют рациональными.
Множество рациональных чисел обозначают символом Q.
Любое рациональное число — бесконечная периодическая десятичная дробь</td>
<td>Иррациональные числа
Числа, которые нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют иррациональными. Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби.
$\sqrt{2}$, $\pi=3{,}1415926\dots$, $e=2{,}7182818\dots$ — иррациональные числа</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Действительные числа
Объединение рациональных и иррациональных чисел называют действительными числами. Множество действительных чисел обозначают символом R. $R \supset Q \supset Z \supset N$.
Действительные числа — бесконечные десятичные дроби</td>
</tr>
</table>

Операции над числами

Свойства сложения	Свойства вычитания
$a+b=b+a$ (перестановочное свойство); $(a+b)+c=a+(b+c)$ (сочетательное свойство); $a+0=a$ (свойство нуля); $a+(-a)=0$ (сумма противоположных чисел)	$a-(b+c)=a-b-c$ (вычитание суммы чисел от числа); $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$ (вычитание числа от суммы чисел); $a-0=a$ (свойство нуля); $0-a=-a$ (свойство нуля)
Свойства умножения	**Свойства деления**
$ab=ba$ (перестановочное свойство); $(ab)c=a(bc)$ (сочетательное свойство); $(a+b)c=ac+bc$ (распределительное свойство); $(a-b)c=ac-bc$ (распределительное свойство); $a\cdot 1=a$ (свойство единицы); $a\cdot 0=0$ (свойство нуля); $a\cdot\frac{1}{a}=1$, если $a\neq 0$ (свойство обратных чисел)	$(a\cdot b):c=a\cdot(b:c)=(a:c)\cdot b$ (деление произведения на число); $(a+b):c=a:c+b:c$ (деление суммы на число); $(a-b):c=a:c-b:c$ (деление разности на число); $a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b$ (деление числа на произведение); $a:1=a$; $0:a=0$, если $a\neq 0$; $a:a=1$, если $a\neq 0$

Делимость чисел

Число 18	Делители: 1, 2, 3, 6, 9, 18	$a \vdots b$ означает, что a делится на b
	Кратные: 18, 36, 54, ...	

Натуральное число a *делится* на натуральное число b ($a \vdots b$), если существует такое натуральное число c, что $a=bc$	$6 \vdots 2$, так как $6=2\cdot 3$; $15 \vdots 3$, так как $15=3\cdot 5$. Если $a \vdots b$, то b — *делитель* a; a — *кратно* b

Свойства делимости

$0 \vdots a$, $a \in N$.

$a \vdots 1$, $a \in N$.

$a \vdots a$, $a \in N$.

Если $a \vdots b$, $a \in N$, $b \in N$, то $a \geqslant b$.

Если $a \vdots b$, $b \vdots c$, $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$, то $a \vdots c$.

Если $a \vdots c$, $b \vdots c$, $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$, то $(a+b) \vdots c$.

Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, $a \in N$, $b \in N$, то $a=b$.

Если $a \vdots b$, $k \neq 0$, то $ak \vdots bk$.

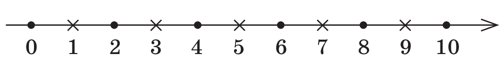
Если $a \vdots c$, $b \vdots c$, $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$, $m \in N$, $n \in N$, то $(am+bn) \vdots c$.

Если $a \vdots (bc)$, $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$, то $a \vdots b$, $a \vdots c$ и $(a \vdots b) \vdots c$.

Если $a \vdots c$ и $(a+b) \vdots c$, $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$, то $b \vdots c$

Числа

Четные:	Нечетные:
0, 2, 4, 6, 8, ...	1, 3, 5, 7, 9, ...



• Четные числа ⨯ Нечетные числа

Простые и составные числа

Натуральные числа

1

Простые числа — натуральные числа, которые имеют только два разных делителя (единицу и само число). Например, 2, 3, 5, 7, 11, 13 — простые числа

Составные числа — натуральные числа, которые имеют больше двух делителей. Например, 4, 6, 9, 10, 12 — составные числа

Число 1 не относят ни к простым, ни к сложным.

Таблица простых чисел (до 500)

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499					

Признаки делимости

Число делится на	2	если его последняя цифра четная
	5	если его последняя цифра 0 или 5
	3	если сумма его цифр делится на 3
	9	если сумма его цифр делится на 9
	10	если его последняя цифра 0
	4	если число, составленное из последних двух цифр, делится на 4
	25	если число, составленное из последних двух цифр, делится на 25

Наименьшее общее кратное (НОК) *Наименьшим общим кратным чисел* a и b называется наименьшее число, которое делится как на число a, так и на число b	Обозначение: НОК $(a; b)$. Например, НОК $(5; 15)=15$; НОК $(15; 9)=45$
Наибольший общий делитель (НОД) *Наибольшим общим делителем чисел* a и b называется наибольшее число, на которое делится и число a, и число b	Обозначение: НОД $(a; b)$. Например, НОД $(5; 15)=5$; НОД $(15; 9)=3$
Чтобы найти НОД, нужно разложить данные числа на простые множители и найти произведение их совместных простых множителей, взятых с наименьшим показателем степени	$a=48=2^4\cdot3$, $b=36=2^2\cdot3^2$, НОД $(a; b)=$ $=$НОД $(48; 36)=$ $=2^2\cdot3=12$
Числа a и b называют *взаимно простыми*, если НОД $(a; b)=1$. НОК $(a; b)\cdot$НОД $(a; b)=ab$	числа 12 и 13 — взаимно простые

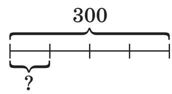
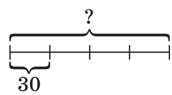
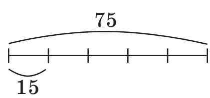
Проценты

Процент — это одна сотая часть	$1\% = \dfrac{1}{100} = 0,01$

Преобразование процентов

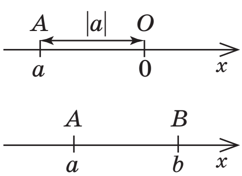
Для того чтобы записать проценты десятичной дробью или натуральным числом, нужно число, которое стоит перед знаком «%», разделить на 100	$27\% = 27:100=0,27$; $200\% = 200:100=2$
Для того чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на 100 %	$0,15=0,15\cdot100\% = 15\%$; $1,7=1,7\cdot100\% = 170\%$

Основные задачи на проценты

Задача	Формула	Пример
Нахождение процента от числа	$p\,\%$ от числа a равно $\dfrac{p \cdot a}{100}$	$25\,\%$ от числа 300 равно $\dfrac{25 \cdot 300}{100} = 75$. 
Нахождение числа по данному проценту	Если $p\,\%$ какого-нибудь числа равно b, то это число равно $b : \dfrac{p}{100} = \dfrac{100b}{p}$	Если $25\,\%$ какого-нибудь числа равно 30, то число равно $\dfrac{100 \cdot 30}{25} = 120$. 
Нахождение процентного отношения	Число a составляет $\dfrac{a}{b} \cdot 100\ \%$ от числа b	Число 15 составляет $\dfrac{15}{75} \cdot 100\ \% = 20\ \%$ от числа 75. 
Увеличение на $p\,\%$	Если число a увеличить на $p\,\%$, то получим число $a \cdot \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)$	Если число 200 увеличить на $30\,\%$, то получим число: $200(1+0{,}3) = 200 \cdot 1{,}3 = 260$
Уменьшение на $p\,\%$	Если число a уменьшить на $p\,\%$, то получим число $a \cdot \left(1 - \dfrac{p}{100}\right)$	Если число 120 уменьшить на $30\,\%$, то получим число: $120 \cdot (1-0{,}3) = 120 \cdot 0{,}7 = 84$

Формула сложных процентов	Если A — начальный вклад (капитал), p — годовой процент, то в конце n-го года вклад (капитал) составит: $A\cdot\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$	Если начальный вклад 1000 и годовой процент 20, то в конце 3-го года вклад составит: $1000\cdot\left(1+\dfrac{20}{100}\right)=3375$

Модуль действительного числа

$\lvert a\rvert=\begin{cases}a, & \text{если } a>0\\ -a, & \text{если } a<0\\ 0, & \text{если } a=0\end{cases}$	$\lvert 5{,}1\rvert=5{,}1$; $\lvert -\sqrt{2}\rvert=\sqrt{2}$; $\lvert 0\rvert=0$
	Если A имеет на числовой прямой координату a, то расстояние от точки A до точки O равно $\lvert a\rvert$, то есть $AO=\lvert a\rvert$. Расстояние между точками A (a) и B (b) на прямой равно $\lvert a-b\rvert$

Свойства модуля

$\lvert a\rvert\geqslant 0$; $\lvert -a\rvert=\lvert a\rvert$; $a\leqslant\lvert a\rvert$; $\lvert a+b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$; $\lvert a+b\rvert\geqslant\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$; $\lvert a-b\rvert\geqslant\big\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\big\rvert$; $\lvert a-b\rvert\leqslant\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$; $\lvert a_1+a_2+\ldots+a_n\rvert\leqslant\lvert a_1\rvert+\lvert a_2\rvert+\ldots+\lvert a_n\rvert$	$\left\lvert\dfrac{a}{b}\right\rvert=\dfrac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$; $b\neq 0$; $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$; $\lvert a^n\rvert=\lvert a\rvert^n$; $n\in N$; $\lvert a\rvert^2=a^2$; $\lvert a\rvert^{2k}=a^{2k}$, $k\in N$

Целая и дробная часть действительного числа

Целой частью числа a (или антье a) называется наибольшее целое число, не превышающее числа a и обозначаемое $[a]$. Например: $[2{,}3]=2$; $\left[\sqrt{2}\right]=1$; $[0{,}5]=0$; $[-1{,}2]=-2$; $\left[-\sqrt{2}\right]=-2$	*Дробной частью числа a* называется число, равное $a-[a]$ и обозначаемое $\{a\}$, то есть $\{a\}=a-[a]$. Например: $\{2{,}3\}=2{,}3-2=0{,}3$; $\{-1{,}2\}=-1{,}2+2=0{,}8$. Любое число a можно представить в виде $a=[a]+\{a\}$

Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Среднее арифметическое нескольких чисел равно сумме этих чисел, поделенной на их количество. $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$	среднее арифметическое чисел 1, 3, 4, 5 равно $\dfrac{1+3+4+5}{4}=\dfrac{13}{4}=3\dfrac{1}{4}$
Среднее геометрическое нескольких чисел равно корню n-й степени из произведения этих чисел. $\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$	среднее геометрическое чисел 2, 8, 4 равно $\sqrt[3]{2\cdot 8\cdot 4}=\sqrt[3]{64}=4$

Соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим *n* чисел

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n}$$

(неравенство Коши)

Пропорция

Равенство двух отношений называется *пропорцией*. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ или $a:b=c:d$. a, d — крайние члены, b и c — средние члены	$12:8=3:2$

Свойства

<table>
<tr><td rowspan="2">Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних ее членов.
Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=bc$</td><td>Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,
то $a=\frac{bc}{d}$; $c=\frac{ad}{b}$;
$b=\frac{ad}{c}$, $d=\frac{bc}{a}$</td></tr>
<tr><td>Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,
то $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$;
$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$</td></tr>
</table>

Производные пропорции

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и $bd\neq 0$,

то $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$; $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$; $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

Прямая и обратная пропорциональность

Прямо пропорциональные величины

Две величины называются *прямо пропорциональными*, если с увеличением значения одной из них в несколько раз значение другой увеличивается во столько же раз.

$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = k$ — коэффициент пропорциональности

Количество карандашей	Стоимость покупки
3	15 руб.
6	30 руб.

Обратно пропорциональные величины

Две величины называются *обратно пропорциональными*, если с увеличением значения одной из них в несколько раз значение другой уменьшается во столько же раз.

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2}$$

Цена карандаша	Количество купленных карандашей на 50 руб.
5 руб.	10
10 руб.	5

Деление числа на части, пропорциональные данным числам

Числа y_1, y_2, y_3, ... пропорциональны числам x_1, x_2, x_3, ..., если $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = k$ — коэффициент пропорциональности.

Для того чтобы поделить число на части, пропорциональные данным числам, нужно поделить его на сумму данных чисел и найденное частное умножить на каждое из них

Масштаб

Масштаб — отношение расстояния на карте к соответствующему расстоянию на реальной местности	Масштаб 1 : 100 000 означает, что 1 см на карте соответствует 100 000 см = 1000 м = 1 км на местности

Степени

Степень с натуральным показателем	$a^1 = a$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, $a \in R$, $n \in N$	$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$, $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; $0^5 = 0$; $1^{10} = 1$
Степень с целым показателем	$a^0 = 1$, где $a \neq 0$, 0^0 — не определено. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in Z$	$(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = -\dfrac{1}{8}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$
Степень с рациональным показателем	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a \geqslant 0$, $m \in Z$, $n \in N$	$25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = 5^3 = 125$; $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4$; $0^{\frac{3}{5}} = 0$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$ — не определено
Степень с иррациональным показателем	Найти $10^{\sqrt{2}}$. $10 = 10^1 < \boxed{10^{\sqrt{2}}} < 10^2 = 100$; $25{,}119 \approx 10^{1{,}4} < \boxed{10^{\sqrt{2}}} < 10^{1{,}5} \approx 31{,}623$; $25{,}704 \approx 10^{1{,}41} < \boxed{10^{\sqrt{2}}} < 10^{1{,}42} \approx 26{,}303$; $25{,}942 \approx 10^{1{,}414} < \boxed{10^{\sqrt{2}}} < 10^{1{,}415} \approx 26{,}002$; $25{,}953 \approx 10^{1{,}4142} < \boxed{10^{\sqrt{2}}} < 10^{1{,}4143} \approx 25{,}960$. Ответ: $10^{\sqrt{2}} = 10^{1{,}4142\ldots} = 25{,}9\ldots$	