Е. В. Хорошилова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЛЕКЦИИ И СЕМИНАРЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным, математическим, инженерно-техническим, гуманитарным направлениям

Москва ▪ Юрайт ▪ 2019

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Х82

***Автор*:**

Хорошилова Елена Владимировна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной техники Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Хорошилова Е. В.

Х82 Высшая математика. Лекции и семинары : учеб. пособие для академического бакалавриата / Е. В. Хорошилова. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 451 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

ISBN 978-5-534-10024-2

Пособие предназначено для повышения общей математической культуры студента-бакалавра, чья будущая специализация имеет гуманитарную направленность. При получении университетского образования такими студентами математика играет важную роль не столько сама по себе, сколько для формирования и укрепления логического мышления обучающегося. Книга состоит из двух разделов. Первый раздел содержит краткий обзорный курс из 8 лекций для ознакомления студентов-нематематиков с содержанием основных (классических) математических разделов. Второй раздел содержит материалы для решения математических задач с целью усвоения и закрепления теоретического материала, полученного на лекциях. Задачи подобраны по принципу разнообразия, иллюстративности и простоты так, чтобы, с одной стороны, дать общее представление об избранных разделах этой дисциплины, а с другой стороны, быть по силам студентам, имеющим, вообще говоря, не слишком глубокий уровень погружения в математику. Задания для семинаров приведены с подробными решениями.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по гуманитарным направлениям и специальностям.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-534-10024-2

Содержание

Семинары

Структура курса

«Я не согласен с математикой. Считаю, что сумма нулей — грозная цифра».
Станислав Ежи Лец (1909—1966) — польский поэт, философ, писатель-сатирик и афорист XX века.

Положение дисциплины в структуре учебных курсов.

Данный курс по высшей математике был разработан для студентов факультета мировой политики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. На факультете лекции по высшей математике читаются в течение третьего семестра 2-го курса. На 1-м курсе математические дисциплины как отдельный предмет не изучаются.

Программа курса высшей математики рассчитана на одну лекцию в 2 недели и одно семинарское занятие в неделю, что составляет около 7—8 лекций и 13—14 семинаров в семестр, а также зачётную работу.

Перечислим основные темы курса.

1. Теория чисел и теория множеств. Последовательности действительных чисел.
2. Функции одной действительной переменной: монотонность, ограниченность, предел и непрерывность.
3. Функции одной действительной переменной: дифференцируемость, экстремумы; исследование функций при помощи производной.
4. Первообразная и неопределённый интеграл. Определённый интеграл и его приложения.
5. Функции нескольких переменных. Теория дифференциальных уравнений.
6. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
7. Кратные интегралы и ряды.
8. Элементы векторного анализа. Математические модели в общественных науках.

Курс основ высшей математики призван помочь формированию у студентов общекультурных и профессиональных *компетенций*, предусмотренных Федеральными государственными образовательными стандартами. После прохождения курса студент должен:

знать

- основные принципы и понятия из различных разделов математики; основные методы математических исследований;
- основные определения, теоремы, подходы к решению задач из основных разделов высшей математики;

уметь

- осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных задач;
- выполнять необходимые расчёты, обосновывать их и представлять результаты;
- использовать соответствующий математический аппарат для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования;

владеть

- культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;
- необходимыми методами количественного анализа в области математического моделирования социально-экономических и политических процессов, теоретического исследования.

Данные лекции представляют собой краткий (обзорный) конспект. За более подробным материалом рекомендуется обращаться к классическим учебникам по высшей математике, видеолекциям известных специалистов и другим источникам (см., например, список рекомендованной литературы).

Предисловие. Что даёт любому из нас изучение математики в юности?

«Разве ты не заметил, что способный к математике изощрён во всех науках в природе?»

Платон (428—348 до н.э.) — древнегреческий философ, ученик Сократа, учитель Аристотеля.

Просто запомните это сейчас.

Со временем у вас появится возможность осознать, проверить на собственном опыте и — не поверите — в подавляющем большинстве случаев согласиться с этим.

Итак, о чём же говорят мудрые люди — прислушайтесь!

- Математика учит мыслить логически, осознанно и ясно.
- Математика учит подходить к информации системно, структурировать материал.
- Математика учит человека терпению, концентрации внимания и последовательности.
- Математика учит правильно подходить к планированию.
- Математика развивает абстрактное мышление, учит обобщать и видеть закономерности.
- Математика облагораживает и воспитывает человека, приучает к дисциплине.
- Особо следует сказать для школьников и студентов гуманитарной направленности: не заблуждайтесь, математика нужна вам! Она нужна не сама по себе (об этом вы догадываетесь), а как необходимое средство формирования вашего интеллекта, крайне полезных в будущем навыков для вашего развития. Как катализатор достижения успеха в вашей специальности и любом виде творчества (это осознают со временем многие успешные люди, достигшие высот в своей совсем нематематической профессии). Изучение математики – отличная гимнастика вашего ума!

Пройдут годы, и наступит момент, когда каждый из вас, кто — со вздохом, кто — с улыбкой, а кто — с гордостью, скажет: «А ведь у меня была в жизни возможность прикоснуться к тайнам высшей математики!» Не упустите время.

Е. В. Хорошилова

Лекции

1. Лекция 1: Элементы теории чисел и теории множеств. Последовательности действительных чисел

«Главная цель расчётов — не цифры, а понимание».

Ричард Хемминг, американский математик, основоположник теории кодирования

I. Действительное число. Классификация действительных чисел (натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа). Модуль действительного числа и его свойства. Сравнение действительных чисел (упорядоченность). Арифметические операции над действительными числами. Приближение действительных чисел рациональными. Геометрический смысл действительного числа.

II. Множество, подмножества. Множество действительных чисел. Числовая прямая, интервал, полуинтервал, сегмент, полупрямая, δ-окрестность точки. Пустое множество. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, дополнение). Понятия взаимно однозначного соответствия и эквивалентных множеств (множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$ эквивалентны). Ограниченные и неограниченные множества. Точные грани. Предельная точка множества. Замкнутые и открытые множества. Мощность множества. Счётные и несчётные множества, множества мощности конти́нуум.

III. Числовая последовательность. Ограниченные (снизу, сверху, с двух сторон) и неограниченные последовательности. Предел последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Единственность предела у сходящейся последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Предельный переход в неравенствах. Принцип двусторонней ограниченности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их основные свойства. Монотонные последовательности. Сходимость монотонной ограниченной последовательности. 2-й замечательный предел. Число e. Подпоследовательность. Предельные точки.

1.1. Действительные числа

«Всё сущее есть число».

Пифагор Самосский

Понятие действительного числа лежит в основе всей математики.

Основы современной теории действительных чисел были заложены во второй половине XIX в. в работах К. Вейерштра́сса, Р. Дедеки́нда, Г. Ка́нтора, Э. Ге́йне, Ш. Мерэ. Так, в 1872 году были опубликованы одновременно две работы: теория фундаментальных последовательностей Ка́нтора (действительное число рассматривается как предел последовательности рациональных чисел), теория бесконечных десятичных дробей Вейерштра́сса (действительное число рассматривается как число, представимое в виде бесконечной десятичной дроби). Остановимся подробнее на теории, предложенной Вейерштрассом и получившей в настоящее время широкое распространение.

Натуральные, целые, рациональные, иррациональные и действительные числа. Из курса элементарной математики известно, что *натуральными* называются числа 1, 2, 3, ... Их бесконечно много. Множество всех натуральных чисел обозначается латинской буквой $\mathbb{N}$ (от лат. *naturalis* — естественный). Если нужно записать, что некоторое число n является натуральным, то используют квантор (знак) принадлежности $\in$ и пишут: $n \in \mathbb{N}$.

Если ко множеству натуральных чисел добавить число 0 (нуль), а также числа –1, –2, –3, ..., противоположные по знаку натуральным числам, то полученное бесконечное множество называют множеством *целых* чисел и обозначают $\mathbb{Z}$.

В международной математической литературе для обозначения множества натуральных (целых положительных) чисел используют также запись $\mathbb{Z}_+$. Для множества целых неотрицательных чисел можно встретить обозначения $\mathbb{Z}_0$, $\mathbb{N}_0$ или $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Рациональным называется число, представимое в виде обыкновенной дроби $\frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное. Например, $0 = \frac{0}{1}$, $-5 = \frac{-5}{1}$, $-\frac{2}{3}$ — рациональные числа. Множество рациональных чисел обозначается буквой $\mathbb{Q}$.

Делением числителя p на знаменатель q обыкновенную дробь всегда можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби[1], например, $\frac{1}{3} = 0,(3)$. Верно и обратное: любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

Поэтому *рациональное число* можно определить иначе, а именно как число, представимое в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Например, 1,2(3), –0,01(20) — рациональные числа.

[1] Если после десятичной запятой, начиная с некоторого разряда, цифры начинают повторяться, то повторяющуюся группу цифр называют *периодом*, а саму десятичную дробь — *периодической*. Период принято записывать в скобках, например 3,0121212...=3,0(12).

Любое целое число, согласно этому определению, является рациональным числом, так как его можно записать в виде периодической дроби с нулевым периодом: 3 = 3,(0).

Помимо рациональных чисел, представимых в виде бесконечных десятичных периодических дробей, существуют числа, представимые бесконечными десятичными непериодическими дробями. Их называют *иррациональными*. Примеры иррациональных чисел: 0,1234567..., $\sqrt{2}$, $\sin 1°$, $\log_2 5$, $\pi = 3{,}14159265358979323846...$, $e = 2{,}7182818284590452353б...$.

Приведём теперь определение действительного (или вещественного) числа. *Действительным* называется число, представимое в виде бесконечной десятичной дроби $\pm a_0,a_1a_2...a_n...$, где символы «+» или «–» называются *знаком числа*, a_0 — целое неотрицательное число, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность десятичных цифр, принимающих значения 0; 1; ...; 9. Число называется *положительным*, если ему приписан знак плюс (+), и *отрицательным*, если минус (–). Например, –5,000..., 0,000..., 0,12345..., 12,4010101... — действительные числа. В этом определении не уточняется — периодической или непериодической является бесконечная периодическая дробь, она может быть и той, и другой.

Если объединить множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел, то полученное множество будет *множеством действительных чисел*, которое обозначают $\mathbb{R}$ (от лат. *realis* — действительный).

Запись $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ означает, что x — иррациональное число. Существуют компле́ксные числа, которые обобщают понятие действительного числа. В данном курсе мы будем рассматривать, в основном, действительные числа.

Таким образом, все действительные числа подразделяются на рациональные и иррациональные. При этом сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел являются рациональными числами. Сумма (разность) рационального и иррационального чисел есть иррациональное число. Произведение рационального и иррационального чисел всегда иррационально, кроме случая, когда рациональное число 0 умножается на иррациональное число (тогда в результате получается нуль — рациональное число).

Правила перевода. Поскольку любое рациональное число можно представить в двух эквивалентных формах (как обыкновенную дробь и как десятичную периодическую дробь), то существуют *правила перевода* рационального числа из вида обыкновенной дроби к виду десятичной дроби и наоборот. Так, в курсе элементарной математики доказывается правило перевода рационального числа, записанного периодической дробью

$$x = a_0,a_1a_2...a_k(a_{k+1}...a_{k+m}),$$

к виду обыкновенной дроби:

$$x = \frac{\overline{a_0a_1...a_{k+m}} - \overline{a_0a_1...a_k}}{\underbrace{99...9}_{m}\underbrace{00...0}_{k}},$$

например:

$$5{,}01(3) = \frac{5013-501}{900} = \frac{4512}{900} = \frac{1504}{300}, \quad 0{,}1(4600) = \frac{14600-1}{99990}, \quad 2{,}(19) = \frac{219-2}{99}.$$

Существуют и другие способы перевода. Например, обозначим переводимую десятичную дробь через x: $x = 5{,}01(3)$, умножим это равенство на сто: $100x = 501{,}(3)$. Затем умножим полученное равенство на десять: $1000x = 5013{,}(3)$ и вычтем из второго равенства первое, при этом одинаковые периоды сократятся: $900x = 4512$. Осталось разделить обе части полученного равенства на 900, и приходим к тому же результату, что и выше.

Следует иметь в виду, что для периодических десятичных дробей с нулевым периодом существует эквивалентная форма записи с периодом, состоящем из девяток. Например, $0{,}(9) = 1{,}(0)$ или $1{,}0(9) = 1{,}1(0)$, что несложно доказать, используя приведённое выше правило перевода.

Модуль действительного числа. Пусть x — произвольное действительное число. Тогда его *модуль* (абсолютная величина) определяется следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|3| = 3$, $|-5| = 5$.

Приведём основные *свойства модуля*.

При всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

1. $|x| = |-x|$; **2.** $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$ $(n \in \mathbb{N})$, но $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$;

3. $|x|^2 = x^2$; **4.** $|xy| = |x||y|$;

5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$; **6.** $|x| = \max(x; -x)$; **7.** $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$,

где $\max(a, b)$ означает наибольшее из чисел a и b, а функция «сигнум» (знак числа), относящаяся к неэлементарным, определяется так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

8. $|x| \geq x$, причём $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$;[1] $|x| \geq -x$, причём $|x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$.

---

[1] Знак равносильности $\Leftrightarrow$ заменяет слова «тогда и только тогда».

9. $|x-y| \geq ||x|-|y||$, причём $|x-y|=||x|-|y|| \Leftrightarrow xy \geq 0$.

Для доказательства возведём неравенство в квадрат:

$$(x-y)^2 \geq (|x|-|y|)^2 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq x^2-2|x||y|+y^2$$
$$\Leftrightarrow |xy| \geq xy,$$

что верно при всех $x, y \in \mathbb{R}$. При этом все эти неравенства одновременно обращаются в равенство при $xy \geq 0$. ▫

---

10. *Неравенство о сумме взаимно обратных чисел*. Для любого $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (т. е. $a \neq 0$) имеет место неравенство: $\left|a+\frac{1}{a}\right| \geq 2$, которое обращается в равенство только при $|a| = 1$.

В частности, при любом положительном a выполняется $a+\frac{1}{a} \geq 2$, которое обращается в равенство только при $a = 1$.

11. *Неравенство треугольника*. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x+y| \leq |x|+|y|, \text{ причём } |x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

12. *Неравенство многоугольника*, или обобщенное неравенство треугольника. Для любых действительных x_i, $i=\overline{1,n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, модуль суммы этих чисел не превышает суммы их модулей:

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|, \text{ или } \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все x_i имеют один знак (все неотрицательны или, наоборот, все неположительны).

Сравнение действительных чисел. Множество действительных чисел *упорядочено*, т. е. между любыми двумя числами можно поставить один и только один из знаков =, <, >. Сравнение действительных чисел в форме бесконечных десятичных дробей производится поразрядно[1]. Например, пусть даны два неотрицательных числа $a = +a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ и $b = +b_0,b_1b_2\ldots b_n\ldots$. Если $a_0 < b_0$, то $a < b$; если $a_0 > b_0$, то $a > b$. В случае равенства $a_0 = b_0$ переходят к сравнению следующего разряда, и так далее. Если равенства $a_k = b_k$ выполняются сразу для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$, то числа a и b считаются равными. Если после конечного числа шагов

---

[1] Напомним, что существуют две эквивалентные формы записи чисел с нулевым периодом: $a_0, a_1a_2\ldots a_n(9) = a_0, a_1a_2\ldots a_n + 10^{-n}$, например, 4,(9) = 5,(0). Поэтому, если запись одного из сравниваемых чисел, начиная с некоторого разряда, представляет собой периодическую десятичную дробь, у которой в периоде стоит 9, то её предварительно будем заменять на эквивалентную запись с нулём в периоде.

встретится первый разряд n такой, что $a_n \neq b_n$, то $a \neq b$. Если при этом $a_n < b_n$, то $a < b$, а если $a_n > b_n$, то $a > b$.

Всякое отрицательное число по определению меньше нуля, а нуль меньше любого положительного числа. Для двух отрицательных чисел a и b меньшим считается то, у которого больше модуль.

Арифметические операции над действительными числами. *Суммой* двух действительных чисел a и b называется действительное число, обозначаемое $a + b$, такое, что для любых рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq b \leq \beta_2$, выполняются неравенства $\alpha_1 + \beta_1 \leq a + b \leq \alpha_2 + \beta_2$.

Разностью действительных чисел a и b называется действительное число, обозначаемое $a - b$, такое, что сумма b и $a - b$ равна a.

Произведением двух положительных действительных чисел a и b называется действительное число, обозначаемое $a \cdot b$, такое, что для любых неотрицательных рациональных чисел α_1, α_2, β_1, β_2, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq b \leq \beta_2$, выполняются неравенства $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq a \cdot b \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$. Если хотя бы одно из чисел a и b равно нулю, то полагают $a \cdot b = 0$. Если числа a и b одного знака, то полагают $a \cdot b = |a| \cdot |b|$. Наконец, если числа a и b разных знаков, то по определению считают, что $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$.

Пусть $b \neq 0$. Назовём число b^{-1} *обратным* к числу b, если $b \cdot b^{-1} = 1$. Тогда операцию *деления* a на b можно определить как произведение a и b^{-1}.

В курсе математического анализа доказываются теоремы существования и единственности суммы, разности, произведения и частного любых двух действительных чисел.

Приближение действительного числа рациональными числами. Рассмотрим важнейшие свойства действительных чисел. Образно говоря, на числовой прямой рациональные числа располагаются «вперемешку» с иррациональными, причём множество иррациональных чисел в известном смысле «плотнее» множества рациональных. Возникает закономерный вопрос, насколько часто на числовой прямой попадаются рациональные и иррациональные числа, и можно ли одни числа приблизить другими. Ответ на этот вопрос дают три леммы.

Лемма 1. Для любого действительного числа a и произвольного положительного рационального числа ε найдётся пара рациональных чисел q_1 и q_2, отстоящих друг от друга менее, чем на ε и таких, что a лежит между этими рациональными числами[1]:

$$\forall a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\, \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : (q_1 \leq a \leq q_2) \wedge (q_2 - q_1 < \varepsilon).$$

Эта лемма говорит о том, что любое действительное число можно с заданной точностью с двух сторон приблизить рациональными числами.

---

[1] Здесь квантор всеобщности $\forall$ заменяет слова «любой, для любого», квантор существования $\exists$ заменяет слова «существует, найдётся»; квантор $\wedge$ означает логическое «и»; квантор $\vee$ означает логическое «или».

Лемма 2. Между любыми двумя различными действительными числами содержится рациональное число:

$$\forall a,b \in \mathbb{R}:\ a \neq b\ \exists q \in \mathbb{Q}: a < q < b.$$

Аналогично можно утверждать, что между любыми двумя различными действительными числами содержится иррациональное число. Отсюда следует, что между двумя неравными действительными числами находится бесконечно много как рациональных, так и иррациональных чисел.

Лемма 3. Пусть a и b — заданные действительные числа. Приближение действительного числа рациональными, описанное в лемме 1, определяет действительное число единственным образом:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}: (q_1 \leq a \leq q_2) \wedge (q_1 \leq b \leq q_2) \wedge (q_2 - q_1 < \varepsilon)) \Rightarrow a = b.$$

Все три леммы активно используются для доказательства различных теорем, связанных с операциями сложения и умножения действительных чисел.

Геометрический смысл действительного числа. Наглядно понятие действительного числа можно представить себе при помощи *числовой прямой*. Если на прямой выбрать направление, начальную точку отсчёта и единицу длины для измерения отрезков, то каждому действительному числу можно поставить в соответствие определённую точку на этой прямой, и обратно, каждая точка будет представлять некоторое, и притом только одно, действительное число.

Вследствие этого соответствия термин «числовая прямая» обычно употребляется в качестве синонима множества действительных чисел.

Заглядывая вперёд, можно сказать, что если натуральные числа возникли в процессе обыкновенного счёта, рациональные — из потребности оперировать частями целого, то действительные числа предназначены для измерения непрерывных величин.

1.2. Множества действительных чисел

«Заговори, чтобы я тебя увидел».
Сократ (470 г. до н. э. — 399 г. до н. э.) —
древнегреческий философ.

Понятие числового множества. *Множество* — одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и логики[1]. Множество — это набор, совокупность, собрание каких-либо объектов, называемых его элементами, обладающих общим для всех характери-

[1] «Под *множеством* мы понимаем объединение в одно целое определённых, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли» (*Георг Кантор*). «*Множество* есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое» (*Бертран Рассел*).

стическим свойством. Понятие множества принимается за основное (аксиоматическое), т.е. не сводимое к другим понятиям. Если элементами множества являются числа, то множество называют *числовым*.

Отношения между множествами. Основное отношение между элементом a и содержащим его множеством A — это *принадлежность* элемента множеству, обозначается: $a \in A$ (a принадлежит A, или A содержит a). Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ (a не принадлежит A, A не содержит a).

Два множества действительных чисел A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. если каждый элемент множества A принадлежит B и, обратно, каждый элемент B принадлежит A. Тогда пишут $A = B$. Таким образом, множество однозначно определяется его элементами и не зависит от порядка записи этих элементов. Например, множество из трёх элементов a, b, c допускает шесть видов записи:

$$\{a,b,c\} = \{a,c,b\} = \{b,a,c\} = \{b,c,a\} = \{c,a,b\} = \{c,b,a\}.$$

Из соображений формального удобства вводят *пустое множество*, не содержащее ни одного элемента. Его обозначают $\varnothing$.

Если каждый элемент множества A входит во множество B, то A называется *подмножеством* B. Пишут $A \subseteq B$, $B \supseteq A$ (A входит в B, или A содержится в B, B содержит A). Очевидно, что если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$. Пустое множество по определению считается подмножеством любого множества.

Если каждый элемент множества A входит в B, но множество B содержит хотя бы один элемент, не входящий в A, т.е. если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется собственным (строгим) подмножеством B. В этом случае пишут $A \subset B$, $B \supset A$ ($\subset, \supset$ — знаки строгого включения). Например, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Основные операции над множествами.

Пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — это множество, содержащее в себе те и только те элементы, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B.

Объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — это множество, содержащее в себе те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из исходных множеств. Если множества A и B не пересекаются: $A \cap B = \varnothing$, то их объединение обозначают также $A + B = A \cup B$.

Разность: $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ — это множество, состоящее из тех элементов A, которые не входят в B.

Дополнение. Пусть $A \subset B$. Множество $\overline{A}$, определяемое из соотношения $\overline{A} = B \setminus A$, называют *дополнением* множества A (до множества B). Иными словами, дополнение множества A до множества B — это множество, содержащее все элементы множества B, не принадлежащие множеству A.

Декартово (*прямое*) *произведение*: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Мощность множества. Счётные и несчётные множества. Мощность множества — это обобщение понятия количества элементов множества, которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные. Мощность множества *A* будем обозначать через $|A|$.

Для того чтобы ввести понятие мощности множества, нам понадобится понятие взаимно однозначного отношения между элементами двух числовых множеств. *Взаимно однозначным соответствием* между множествами *A* и *B* называется соответствие, обладающее следующими тремя свойствами: 1) каждому элементу множества *A* соответствует один и только один элемент множества *B*; 2) двум различным элементам множества *A* соответствуют два различных элемента множества *B*; 3) всякий элемент множества *B* соответствует хотя бы одному элементу множества *A*.

Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), то такие множества называются *равномощными* (или эквивалентными). С точки зрения теории множеств равномощные множества неразличимы.

Докажем, например, что множество чётных целых чисел $\mathbb{E}$ имеет такую же мощность, что и множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Определим функцию $f:\mathbb{E}\to\mathbb{Z}$ так: $f(x)=\dfrac{x}{2}$. Эта функция устанавливает взаимно однозначное отображение между множествами $\mathbb{E}$ и $\mathbb{Z}$, поэтому $|\mathbb{E}|=|\mathbb{Z}|$.

Мощность множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначается символом $\aleph_0$ («алеф-нуль»). Множество называется *бесконечным*, если его мощность $\geq\aleph_0$. *Счётным* называется множество, эквивалентное множеству натуральных чисел. Это множество, элементы которого можно занумеровать натуральными числами. Как доказал Г. Кантор, множество всех рациональных чисел — счётно, однако множество всех действительных чисел — несчётно. Таким образом, счётные множества — это «самые маленькие» из бесконечных множеств.

Про множества, равномощные множеству всех действительных чисел, говорят, что они имеют *мощность конти́нуум* (от лат. *continuum* — непрерывное), и мощность таких множеств обозначается символом *c*. Например, отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) континуальны.

Перечислим *основные свойства*, связанные с мощностью множеств.

1. Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов. То есть для конечного множества понятие мощности множества совпадает с привычным понятием количества элементов множества.

2. Любое подмножество счётного множества конечно или счётно.

3. Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно.

4. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

5. Для бесконечных множеств, в отличие от конечных, мощность множества может совпадать с мощностью своего собственного подмножества, например $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$. Более того, множество бесконечно тогда и только тогда,

когда оно содержит равномощное собственное (т.е. не совпадающее с основным множеством) подмножество.

6. Удаление или добавление конечного числа элементов не меняет мощности бесконечного множества.

7. *Теорема Кантора*[1] *гарантирует существование более мощного множества для любого данного: «Множество всех подмножеств множества A* (включая пустое подмножество и само множество) мощнее A».

8. Множество всех конечных подмножеств счётного множества счётно.

9. Множество всех подмножеств счётного множества континуально.

10. Мощность декартова произведения: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. В частности, прямое произведение конечного числа счётных множеств счётно.

11. Декартово произведение бесконечного множества A с самим собой равномощно A.

12. Формула включения-исключения для мощностей пересекающихся множеств в простейшем виде: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Ограниченные и неограниченные множества. Непустое множество действительных чисел X называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует действительное число M (соответственно, m) такое, что для любых $x \in X$ справедливо $x \le M$ ($x \ge m$). Число M называется при этом *верхней* (*нижней*) *гранью* множества X.

Заметим, что если множество имеет хотя бы одну верхнюю (нижнюю) грань, то оно имеет сразу бесконечно много верхних (нижних) граней, поскольку любое число, большее верхней грани (меньшее нижней грани) также является верхней (нижней) гранью множества X.

Например, множество значений функции $y = x^2$ ограничено снизу, так как $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем $x^2 \ge 0$ (в качестве нижней грани выступило $m = 0$), но при этом область определения этой функции — неограниченное множество: $D(y) = \mathbb{R}$.

Неограниченное сверху множество определяется, используя прием отрицания, как множество, не являющееся ограниченным сверху. Сформулируем это определение в развёрнутом виде. Для этого в определении ограниченного сверху множества заменим формально квантор $\forall$ (любой, всякий) на квантор $\exists$ (существует, найдётся), и наоборот, квантор $\exists$ заменим на знак $\forall$; кроме того, знак неравенства поменяем на противоположный. Получим следующее определение: непустое множество X называется *неограниченным сверху*, если для любого (сколь угодно большого) положительного числа M найдётся число $x' \in X$, для которого $x' > M$. Аналогично формулируется определение множества, не ограниченного снизу: множество X не ограничено снизу, если для любого (сколь угодно большого) положительного числа M найдётся число $x' \in X$, для которого $x' < -M$.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным* (с двух сторон), если оно ограничено как сверху, так и снизу. Эквивалентное определение:

[1] *Георг Кантор* (1845—1918) — немецкий математик, создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике. Кантор ввёл понятие взаимно однозначного соответствия между элементами множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных.

множество X ограничено, если найдётся такое (положительное) действительное число M, что для любого $x \in X$ верно $|x| \leq M$. Например, интервал (a, b), отрезок $[a, b]$, а также конечное множество $\{1; 2; 8\}$ представляют собой примеры ограниченных множеств, а полупрямая $(-\infty, b)$ и множество целых отрицательных чисел $Z\_$ являются множествами, ограниченными сверху, но не ограниченными снизу. Как следует из определения, множество не ограничено тогда и только тогда, когда оно не ограничено сверху или не ограничено снизу.

Точные грани и их свойства. Назовём число $\overline{x} \in X$ $(\underline{x} \in X)$ *наибольшим* (*наименьшим*) *элементом* множества X, если $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \leq \overline{x}$ $(x \geq \underline{x})$. Отметим, что наибольший (наименьший) элемент множества X, если он существует, то всегда принадлежит множеству. Например, наибольший элемент сегмента $[a, b]$ равен b, а наименьший элемент множества натуральных чисел равен 1. Однако не все числовые множества имеют наибольший или наименьший элементы. Например, полуинтервал $[a, b)$ не имеет наибольшего элемента.

Введём понятия точных граней числового множества, обобщающих понятия наибольшего и наименьшего элементов.

Пусть X — ограниченное множество действительных чисел. *Точной верхней гранью*, или супре́мумом (от лат. *suprémum* — самый высокий) множества X называется наименьшая из его верхних граней. Аналогично, *точной нижней гранью*, или и́нфимумом (от лат. *ínfimum* — самый низкий) множества X называется наибольшая из его нижних граней. Например, для множества $X = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$ рациональных чисел, квадрат которых меньше двух, $\sup X = \sqrt{2}$ и $\inf X = -\sqrt{2}$.

Заметим, что эти определения ничего не говорят о том, принадлежат ли $\sup X$ и $\inf X$ множеству X. В случае, когда $\overline{x} = \sup X \in X$, говорят, что $\overline{x}$ является наибольшим элементом X (супремум достигается на элементе $\overline{x}$). В случае $\underline{x} = \inf X \in X$ говорят, что $\underline{x}$ является наименьшим элементом X (инфимум достигается на элементе $\underline{x}$).

Для неограниченного сверху (снизу) множества X по определению полагают $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$. Таким образом, в отличие от наибольшего и наименьшего элементов, точные грани существуют у любого непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}$.

Например, $\inf[a,b] = a$, $\inf(a,b) = a$, $\sup N = +\infty$. Для множества X, состоящего из чисел вида $\left\{2; \dfrac{1}{n}\right\}$, где $n \in \mathbb{N}$, имеем: $\inf X = 0$ (не достигается), $\sup X = 2$ (достигается и совпадает с наибольшим элементом).

Сформулируем определения точных граней, эквивалентные приведённым выше.

Действительное число $\overline{x}$ называется $\sup X$, если:

1) $\overline{x}$ есть верхняя грань X, т.е. для всех элементов $x \in X$ верно $x \leq \overline{x}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x' \in X$ такой, что $x' > \overline{x} - \varepsilon$ (т.е. к $\overline{x}$ можно сколь угодно близко «подобраться» из множества X, точная грань «вплотную» подходит к X).

Аналогичное определение можно сформулировать и для точной нижней грани.

Действительное число $\underline{x}$ называется $\inf X$, если:

1) $\underline{x}$ есть нижняя грань X, т.е. для всех элементов $x \in X$ верно $x \geq \underline{x}$;
2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x' \in X$ такой, что $x' < \underline{x} + \varepsilon$.

Наконец, приведём еще два определения точных граней: действительное число $\overline{x}$ называется $\sup X$, если:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \leq \overline{x}$;
2) $\forall x' < \overline{x}\ \exists x \in X \Rightarrow x > x'$.

Аналогично, действительное число $\underline{x}$ называется $\inf X$, если:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \geq \underline{x}$;
2) $\forall x' > \underline{x}\ \exists x \in X \Rightarrow x < x'$.

Открытые и замкнутые множества. Назовём *окрестностью точки* x_0 на числовой прямой любой интервал этой прямой с центром в этой точке. Например, интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ называется δ-окрестностью точки x_0, а тот же интервал с выколотым центром (т.е. без точки x_0) — проколотой δ-окрестностью точки x_0.

Точка x_0 называется *предельной точкой* (*точкой сгущения*) множества X, если в любой окрестности точки x_0 имеется по крайней мере ещё одна точка множества X, отличная от точки x_0. Отсюда следует, что в любой окрестности предельной точки всегда содержится бесконечное число точек множества X. При этом сама предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X. Точка x_0, не являющаяся предельной точкой множества X, называется *изолированной точкой* множества X. Назовём точку x_0 *внутренней точкой* множества X, если она принадлежит множеству X вместе с некоторой достаточно малой её окрестностью.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Если множество не имеет ни одной предельной точки, то его тоже принято считать замкнутым. Пример замкнутого множества — отрезок $[a, b]$. Кроме своих предельных точек, замкнутое множество может также содержать изолированные точки. Множество называется *открытым*, если каждая его точка является для него внутренней. Пример открытого множества — интервал (a, b).

Точка X называется *граничной точкой* множества X, если в любой её окрестности есть как точки, принадлежащие множеству, так и точки, ему не принадлежащие. Множество всех граничных точек данного множества образуют его *границу*. *Внешние точки* — это те, которые не являются ни внутренними, ни граничными. Используя понятие граничной точки, можно определить замкнутое множество как множество, содержащее все свои граничные точки.

Выпуклое множество (на числовой прямой, а также на плоскости, в пространстве) — это множество, которое наряду с любыми двумя точками A и B содержит также весь отрезок AB. Примеры выпуклых множеств: отрезок, прямая, круг, плоскость. Однако, например, окружность не является выпуклым множеством.

1.3. Последовательности действительных чисел

«В сочетании цифр есть безусловная магия, не чувствуют её лишь люди, начисто лишенные воображения».

Борис Акунин. Весь мир театр.

В элементарной математике уже встречались последовательности в виде арифметических и геометрических прогрессий и изучались их свойства. Обобщим эти понятия.

Понятие (бесконечной) числовой последовательности. Если каждому натуральному числу n поставить в соответствие некоторое действительное число x_n, то полученное (счётное) множество чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ будет называться *числовой последовательностью* и обозначаться $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ или просто x_n.[1] При этом числа x_n называются *членами* последовательности.

Последовательности часто задаются формулами их общего члена, например, $x_n = n^2$, $y_n = 1/n$, $z_n = \sin n$, $u_n = 5n + 2$, $p_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ и т.д.

Фактически, последовательность — это множество занумерованных действительных чисел, поэтому на них распространяются основные определения и свойства множеств.

Ограниченные и неограниченные последовательности. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *ограничена сверху* (*снизу*), если существует такое действительное число M (m), что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$. Числа M и m называются в этом случае *верхней и нижней гранями* последовательности $\{x_n\}$ соответственно.

Например, последовательность $x_n = \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ограничена снизу, поскольку $\sqrt{n} \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Число 0 является в данном случае одной из нижних граней (любое число, меньшее 0, например (–1), также будет нижней гранью). При этом эта последовательность не ограничена сверху.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной с двух сторон*, или просто *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. если существуют такие действительные числа m и M, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $m \le x_n \le M$.

Например, последовательность $x_n = \cos n$ $(n \in \mathbb{N})$ ограничена как снизу, так и сверху, поскольку $-1 \le \cos n \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Можно сформулировать определение ограниченной последовательности в эквивалентном виде: $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \le A$. Используя математическую символику, последнее определение записывается кратко:

[1] В дальнейшем будем опускать термин «числовая», везде понимая под последовательностью (если не оговорено иное) последовательность действительных чисел.

$$\{x_n\} - \text{ограничена} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists A \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \le A,$$

где двоеточие заменяет слова «такое, что».

Если теперь мы заменим в последнем определении квантор всеобщности ($\forall$) квантором существования ($\exists$) и наоборот, и поменяем знак в неравенстве на противоположный, то получим отрицание определения, т.е. определение того, что последовательность является неограниченной. А именно, последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого положительного числа A найдётся натуральный номер N такой, что $|x_N| > A$:

$$\{x_n\} \text{ — не ограничена} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall A \in \mathbb{R}\ \ \exists N = N(A) \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_N| > A.$$

Например, последовательность $x_n = n^2$ не ограничена сверху, так как для любого (сколь угодно большого!) числа $A > 0$ найдётся номер N такой, что $|x_N| = N^2 > A$. Для этого достаточно взять $N > \sqrt{A}$, например, $N = [\sqrt{A}] + 1$, где $[\sqrt{A}]$ — целая часть числа $\sqrt{A}$.

Введём еще несколько важных определений.

Арифметические операции над последовательностями. Рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Последовательность $\{x_n + y_n\} = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots\}$ называется *суммой* $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$; последовательность $\{x_n - y_n\} = \{x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n, \ldots\}$ — их *разностью*; последовательность $\{x_n \cdot y_n\} = \{x_1 \cdot y_1, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots\}$ — *произведением*; последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots\right\}$ — *частным* (если $y_k \ne 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$).

Например, если $x_n = (-1)^n$, а $y_n = 1/n$, то частным этих последовательностей будет последовательность $\frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{n}$.

Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого (сколь угодно большого) положительного действительного числа A найдётся такой номер $N = N(A)$ (зависящий от A), что для любого $n \ge N$ (т.е. начиная с этого номера) будет выполнено: $|x_n| > A$.

Например, последовательности $x_n = n^4$, $y_n = (-1)^n n$ являются бесконечно большими.

Забегая вперёд, скажем, что последовательность является бесконечно большой, если её предел равен бесконечности ($+\infty, -\infty, \infty$), см. далее пункт «Предел последовательности».

Заметим, что если последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая, то она, очевидно, является неограниченной. Обратное, вообще говоря, неверно.

Например, последовательность $\{x_n\}=\{0,1,0,2,0,3,\ldots\}$ — неограниченная, но не бесконечно большая.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного действительного числа ε найдётся натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$ будет выполнено: $|x_n| < \varepsilon$.

Например, последовательность $x_n = \dfrac{1}{\ln n}$ $(n=2,3,4,\ldots)$ — бесконечно малая, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$ будет выполнено: $\left|\dfrac{1}{\ln n}\right| < \varepsilon$. Действительно, решая последнее неравенство относительно n, находим этот номер: $\ln n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. $n > e^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Наименьшим $N(\varepsilon)$, удовлетворяющим последнему неравенству, будет $N=[e^{\frac{1}{\varepsilon}}]+1$.

Иными словами, последовательность является бесконечно малой, если её предел равен нулю (см. далее «Предел последовательности»).

Обратимся к свойствам бесконечно малых последовательностей.

Свойства бесконечно малых последовательностей.

1. Сумма $\{\alpha_n+\beta_n\}$, разность $\{\alpha_n-\beta_n\}$ двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ также являются бесконечно малыми последовательностями. Как следствие, сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

2. Произведение $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ ограниченной последовательности $\{x_n\}$ на бесконечно малую последовательность $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой последовательностью.

Рассмотрим, например, предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}$. Так как последовательность $\sin n$ ограничена $|\sin n| \leq n$, а последовательность $1/n$ сходится к 0, то данный предел равен нулю.

3. Всякая бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$ является ограниченной.

4. Произведение $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ двух (а значит, любого конечного числа) бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta n\}$ является бесконечно малой последовательностью.

5. Если $\{y_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то начиная с некоторого номера n определена последовательность $\{1/y_n\}$, которая является бесконечно малой последовательностью. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая и $\alpha_n \neq 0$ для любого натурального номера n, то последовательность $\{1/\alpha_n\}$ является бесконечно большой.

Предел последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности.

Предел последовательности — одно из важнейших понятий в теории числовых последовательностей.

Опр. 1. Действительное число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного (сколь угодно малого!) числа ε существует натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ (зависящий от ε) такой, что при всех $\forall n \geq N$ выполняется условие: $|x_n - a| < \varepsilon$. Последовательность $\{x_n\}$ называется в этом случае *сходящейся* к числу a. Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, или $x_n \to a$ при $n \to +\infty$. Если последовательность не является сходящейся, то говорят, что она *расходится*.

Приведём ещё два определения сходящейся последовательности, эквивалентные приведённому выше.

Опр. 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если найдётся действительное число a такое, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. Число a называется в этом случае *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ в Опр. 1 можно переписать в виде: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Тогда получим, что последовательность сходится к a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральный номер $N = N(\varepsilon)$, удовлетворяющий условию: $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $\forall n \geq N$. Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ будем называть ε *-окрестностью* точки a и обозначать $B_\varepsilon(a)$.

Опр. 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если найдётся действительное число a такое, что в любой ε-окрестности точки a содержатся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера (зависящего, вообще говоря, от ε).

Примеры сходящихся последовательностей (имеющих конечный предел):

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0, \quad \left\{\frac{2n+1}{n}\right\} \to 2, \quad \left\{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right\} \to 0, \quad \{a^n\} \to 0 \text{ при } |a|<1,$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \to e, \quad \left\{\frac{n}{2^n}\right\} \to 0, \quad \left\{\frac{\ln n}{n}\right\} \to 0.$$

Понятие бесконечного предела. Последовательности, имеющие бесконечный предел, относят к расходящимся, как и те, у которых предел не существует.

Опр. 4. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к* $+\infty$ (стремится к $-\infty$) при $n \to +\infty$, если для любого действительного $A > 0$ найдется номер N, зависящий от A, такой, что $x_n > A$ $(x_n < -A)$ $\forall n \geq N$.

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (соответственно, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$), или $x_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ (соответственно, $x_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$).

Опр. 5. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к бесконечности* (без указания знака) при $n \to +\infty$, если для любого действительного $A > 0$ найдётся номер N, зависящий от A, такой, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$ (т.е. если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой).

Обозначения: $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \infty$, или $x_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

Примеры расходящихся последовательностей: $\{-n\} \to -\infty$, $\{n^3\} \to +\infty$, $\{\ln\frac{1}{n}\} \to -\infty$, $\{2^n\} \to +\infty$, $\{a^n\} \to +\infty$ при $a > 1$, $\{(-1)^n n\}$ (бесконечный предел); $\{(-1)^n\}$, $\{\sin n\} \to \infty$ (предел не существует).

Свойства сходящихся последовательностей.

1. Сходящаяся последовательность имеет один и только один предел.

2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

3. Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$. Тогда существует предел суммы и разности этих последовательностей, причем $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

4. Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$. Тогда существует предел произведения этих последовательностей, причем $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

5. Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$. Тогда существует предел частного этих последовательностей, причем $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

6. Теорема (*о предельном переходе под знаком неравенства*). Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ и последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$) при всех $n \geq N$ для некоторых $b \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$. Тогда и предел этой последовательности также удовлетворяет неравенству $a \geq b$ (соответственно, $a \leq b$).

Замечание. Из того, что $x_n > b$ при всех натуральных n, не следует, вообще говоря, что $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n > b$ (а лишь $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \geq b$). Например, $1 + \dfrac{1}{n} > 1$, но $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Следствие 1. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — сходящиеся последовательности и существует натуральный номер N такой, что $x_n \leq y_n \ \forall n \geq N$. Тогда $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Следствие 2. Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Если для любого натурального n верно, что $x_n \in [b, c]$, то $a \in [b, c]$.

7. (*Принцип двусторонней ограниченности*). Пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = a$. Если последовательность $\{z_n\}$ такова, что для всех натуральных $n \geq N$ выполнено двойное неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = a$.

Пример 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, а последовательность $\{y_n\}$ — расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей

а) $\{x_n + y_n\}$; б) $\{x_n y_n\}$?

Решение. а) Последовательность $\{x_n + y_n\}$ — расходится. Действительно, если бы она сходилась, то сходилась бы и разность последовательностей $\{x_n + y_n\}$ и $\{x_n\}$. Но это невозможно, так как $\{(x_n+y_n)-x_n\}=\{y_n\}$, а $\{y_n\}$ — расходится.

б) Последовательность $\{x_n y_n\}$ может как сходиться, так и расходиться. Например, $\{x_n\}=\dfrac{1}{n}$ — сходится, $\{y_n\}=(-1)^n$ — расходится, $\{x_n y_n\}=\dfrac{(-1)^n}{n}$ — сходится. Или $\{x_n\}=\dfrac{1}{n}$ — сходится, $\{y_n\}=(-1)^n n$ — расходится, $\{x_n y_n\}=(-1)^n$ — расходится.

Пример 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\{y_n\}$ — произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$? Привести различные примеры.

Решение. Если $\{y_n\}$ имеет конечный предел, то да. Например, $\{x_n\}=\dfrac{1}{n}$, $\{y_n\}=2+\dfrac{1}{n}$.

Если $\{y_n\}\to\pm\infty$, то $\{x_n y_n\}$ может как сходиться, так и расходиться. Например, $\{x_n y_n\}$ сходится для $\{x_n\}=\dfrac{1}{n^2}$, $\{y_n\}=n$, и расходится для $\{x_n\}=\dfrac{1}{n}$, $\{y_n\}=n^2$.

Если $\{y_n\}$ не имеет предела, то $\{x_n y_n\}$ может и сходиться, и расходиться. Например, она сходится при $\{x_n\}=\dfrac{1}{n}$, $\{y_n\}=(-1)^n$, и расходится при $\{x_n\}=\dfrac{1}{n}$, $\{y_n\}=(-1)^n n$.

Монотонные последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для любого натурального номера n выполняется неравенство $x_n \le x_{n+1}$ ($x_n \ge x_{n+1}$). В частности, если для любого натурального номера n выполняется строгое неравенство $x_n < x_{n+1}$ (соответственно, $x_n > x_{n+1}$), то последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*).

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*, причем убывающие и возрастающие — *строго монотонными*.

Одним из важнейших свойств монотонных последовательностей является следующее.

Теорема. *Если последовательность $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху (не возрастает и ограничена снизу), то она сходится.*

Можно показать, что последовательность $\{x_n\}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху. Предел этой последовательности есть иррациональное число $e = 2{,}718281828459045\ldots$. Предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ называют *2-м замечательным пределом*.

Известна ещё одна формула для числа e: $e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+$ $+\ldots=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$.

Понятие подпоследовательности. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ — натуральные числа такие, что $k_1 < k_2 <$ $< \ldots < k_n < \ldots$. Тогда последовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{k_n}\}$.

Например, из последовательности $x_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ можно выделить две подпоследовательности: с чётными номерами $(n = 2k, k \in \mathbb{N}$, тогда $x_{2k} = 1)$ и с нечётными номерами $(n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$, тогда $x_{2k-1} = -1)$.

Теорема 1. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к числу* a, *то любая ее подпоследовательность* $\{x_{k_n}\}$ *также сходится к* a.

Следствие. Если из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам, то последовательность $\{x_n\}$ расходится.

Докажем, например, расходимость последовательности $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим подпоследовательность x_{2k} членов с чётными номерами $x_{2k} = 1$ $(k \in \mathbb{N})$, которая, очевидно, сходится к числу 1. С другой стороны, рассмотрим подпоследовательность с нечётными номерами $x_{2k-1} = -1$, которая сходится к своему пределу (-1). Так как нашлись две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам, то это противоречит теореме о единственности предела. Это означает, что x_n — расходится.

Важную роль в теории последовательностей играет следующая теорема.

Теорема 2 (*Больца́но—Вейерштра́сса*). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Существуют различные приемы вычисления пределов последовательностей, которые рассматриваются на семинарах.

Раскрытие неопределённостей. При вычислении пределов наибольший интерес представляют ситуации с так называемыми «неопределённостями». Например, при вычислении предела вида $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$ может оказаться, что обе последовательности $f(n)$ и $g(n)$ являются в точке a бесконечно малыми (или, наоборот, бесконечно большими). В этом случае говорят, что имеют дело с *неопределённостью* вида $\dfrac{0}{0}$ (или, соответственно, с *неопределённостью* $\dfrac{\infty}{\infty}$). Для вычисления предела в этом случае надо, используя различные приемы, преобразовать данный предел к виду, более удобному для его вычисления. Вычислить предел в этой, часто непростой, ситуации называется «раскрыть неопределённость».

Пример 1. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+1}{5n^3 - 3n + 2}$.

Решение. Проанализируем выражение под знаком предела. Заметим, что имеется неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, поскольку при $n \to +\infty$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечностям. Найдём главный член в числителе (это $7n$), в знаменателе (это $5n^3$, он быстрее других слагаемых в знаменателе стремится к бесконечности) и вынесем за скобку в числителе и знаменателе, соответственно, n и n^3. После этого сократим дробь на общий множитель n:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{7n+1}{5n^3-3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(7+\frac{1}{n})}{n^3(5-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{n^2(5-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3})}.$$

Проверим, сохранилась ли неопределённость. Устремив $n\to+\infty$, видим, что теперь числитель стремится к 7, а знаменатель, по-прежнему, к ∞. Неопределённость пропала, предел можно вычислить, он оказался равен 0.

Пример 2. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^5-3n+7}{3n^3-2}$.

Решение. Как и предыдущем примере, имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой разделим числитель и знаменатель на n^3:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5-3n+7}{3n^3-2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{3-\frac{2}{n^3}}.$$

Поскольку числитель стремится к $+\infty$, а знаменатель к 3, то предел равен $+\infty$.

Пример 3. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^4+27}{3n^4-2n^3+5}$.

Решение. Чтобы раскрыть неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ и вычислить предел, разделим числитель и знаменатель дроби на n^4:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+27}{3n^4-2n^3+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{27}{n^4}}{3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^4}}.$$

Поскольку числитель стремится к 1, а знаменатель к 3, то предел равен 1/3.

См. также о последовательностях и их пределах видеоурок **Валерия Ивановича Опойцева** (псевдоним: Босс, д.ф.-м.н., профессор, ИПУ РАН, Кафедра проблем управления МФТИ) на его сайте:
https://oschool.ru/lectures/h-mats/4k84bD7fl
(Последовательности и пределы).

Об Опойцеве В. И.: http://www.koob.ru/boss/

2. Лекция 2: Функции одной действительной переменной: ограниченность, монотонность, экстремумы, предел и непрерывность

«Предмет математики настолько серьёзен, что полезно не упустить случая сделать его немного занимательным».
Б. Паскаль (1623—1662), французский математик, механик, физик, литератор и философ.

I. Понятие функции, системы координат. Понятие (однозначной) функции одной действительной переменной. Область определения, область значений, график. Ограниченные (неограниченные) функции, точные грани. Чётные (нечётные) функции. Монотонные функции. Периодические функции. Выпуклые функции, точки перегиба. Обратная функция. Свойства взаимно обратных функций. Экстремумы.

Декартова и полярная системы координат. Явный, неявный, параметрический способы задания функции. Элементарные функции (включая обратные тригонометрические и гиперболические функции). Примеры неэлементарных функций (функция Дирихле, сигнум, целая и дробная части.)

II. Предел функции. Предел функции (по Коши́ и по Ге́йне, их эквивалентность), графический смысл предельного значения. Бесконечный предел $(+\infty,-\infty,\infty)$. Пределы при $x \to \pm\infty, x \to \infty$. Односторонние пределы. Равенство в точке односторонних пределов как необходимое и достаточное условие существования предела в этой точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предельные значения в заданной точке. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их сравнение (понятия о-малого, О-большого). Замечательные пределы. Раскрытие неопределённостей (кроме правила Лопита́ля и формулы Те́йлора).

III. Непрерывность функции. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Непрерывность элементарных функций на их области определения. Арифметические операции над непрерывными функциями. Понятие сложной функции. Непрерывность сложной функции. Основные свойства непрерывных функций. Классификация точек разрыва.

2.1. Функции одной переменной: определение, ограниченность, монотонность, выпуклость. Явный, неявный и параметрический способы задания

«Лучший способ изучить что-либо — это открыть самому».

Д. Пойа (1887—1985), венгерский, швейцарский и американский математик, популяризатор науки.

Понятие однозначной функции одной переменной. Пусть X — непустое множество действительных чисел и каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное число $y \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$. При этом x называется *независимой переменной* (или *аргу́ментом*), y — *зависимой переменной*, или значением функции в точке x. Множество X называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$, а множество $Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ — *областью значений* функции и обозначается $E(f)$. Говорят, что функция f *отображает* множество X на множество Y, причём y является *образом* x. Обозначение $f\colon X \to Y$.

Графиком функции называется множество точек плоскости вида $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Пример 1. Найти области определения и области значений функций:

$$\text{а) } y = \cos 2x, \text{ б) } y = \operatorname{tg} x, \text{ в) } y = \operatorname{sgn} x, \text{ г) } y = 1 - x^2, \text{ д) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Решение. а) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [-1,1]$; б) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$, $E(f) = \mathbb{R}$; в) $D(f) = \mathbb{R}$; $E(f) = \{-1; 0; 1\}$; г) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (-\infty, 1]$; д) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (0, +\infty)$.

Ограниченные и неограниченные функции. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на этом множестве, если существует такое число M (соответственно, m), что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M$ (соответственно, $f(x) \ge m$). При этом число M (соответственно, m) называется *верхней гранью* (соответственно, *нижней гранью*) функции $y = f(x)$ на указанном множестве.

Если функция ограничена сверху числом M (соответственно, снизу числом m), то это означает, что весь график функции расположен на плоскости Oxy не выше прямой $y \equiv M$ (соответственно, не ниже прямой $y \equiv m$).

Например, функция $y = x^2$, если её рассматривать на всем множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, ограничена снизу (в качестве нижней грани можно взять, например, число $m = 0$ или любое отрицательное число), но не ограничена сверху.

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной с двух сторон* (или просто *ограниченной*) на этом множестве, если существует такое положительное число M, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$ (т.е. $-M \le x \le M$). В противном случае, т.е. если $\forall M > 0\ \exists x \in X : |f(x)| > M$, функция называется *неограниченной* на X. Таким образом, ограниченность функции означает ограниченность её области значений.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, поскольку $|\sin x| \le 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$; показательная функция $y = a^x$ $(a > 0, a \ne 1)$ ограничена снизу, поскольку $a^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, а функция $y = x^3$ не является ограниченной на множестве действительных чисел ни сверху, ни снизу.

Точные грани функции. Назовём *точной верхней* (соответственно, *точной нижней*) *гранью функции* $y = f(x)$, $x \in X$, точную верхнюю (соответственно, нижнюю) грани множества её значений. Обозначения:

$$\sup_{x \in X} f(x), \quad \inf_{x \in X} f(x).$$

Если точные грани достигаются при некоторых $x \in X$, тогда они называются, соответственно, *наибольшим и наименьшим* значениями функции.

Например, для функции $y = \sin x$ точная верхняя грань равна 1, причём она достигается в точках вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Любое число, большее 1, будет верхней гранью функции, но никакое число, меньшее 1, верхней гранью уже не является. У функции $y = \operatorname{arctg} x$ точная верхняя грань также существует и равна $\frac{\pi}{2}$, однако не достигается ни при каких $x \in \mathbb{R}$.

Чётные (нечётные) функции. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, симметричном относительно точки $x = 0$, называется *чётной* (*нечётной*), если при всех $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно, $f(-x) = -f(x)$). Функцию, не являющуюся ни чётной, ни нечётной (на множестве X), будем называть функцией *общего вида*.

График чётной функции всегда симметричен относительно оси ординат, а нечётной — имеет центр симметрии в начале координат.

Примеры чётных функций: $y = |x|$, $y = x^2$, $y = 1/x^4$, $y = \cos x$. Заметим, что любая сложная функция вида $y = f(g(x))$ будет чётной, если «внутренняя» функция $g(x)$ — чётная (при любой «внешней» функции $y = f(g)$). Например, $y = \sqrt[3]{\cos x - 1} + 5$ — чётная функция, так как её можно представить в виде $y = f(g(x))$, где $f(g)=\sqrt[3]{g-1}+5$, и «внутренняя» функция $g(x) = \cos x$ — чётная.

Докажем чётность функции $y(x)=\sqrt[3]{\cos x-1}+5$, используя определение чётной функции. Тогда получим, что при всех $x\in\mathbb{R}$: $y(-x) = \sqrt[3]{\cos(-x)-1}+5=\sqrt[3]{\cos x-1}+5=y(x)$, что и означает, что функция является чётной.

Примеры нечётных функций: $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y=\sqrt[5]{x}$, а также любая сложная функция вида $y = f(g(x))$ будет нечётной, если обе функции $y = f(g)$ и $g = g(x)$ являются нечётными. Например, функция $y = \operatorname{tg}^3 x$ — нечётная функция.

Докажем тот факт, что $y = \operatorname{tg}^3 x$ — нечетная функция, опираясь на определение нечётной функции: при всех $x\neq\pi/2+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$ верно тождество $y(-x)=\operatorname{tg}^3(-x)=-\operatorname{tg}^3 x=-y(x)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что если функция $y = f(x)$ определена на множестве X, симметричном относительно $x = 0$, то её всегда можно представить (причем единственным образом!) в виде суммы чётной и нечётной функций:

$$f(x)\equiv\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

где $\varphi(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ — чётная функция, а $\psi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ — нечётная функция.

Например, представим хорошо известную квадратичную функцию в виде суммы чётной и нечётной функций (на множестве $\mathbb{R}$):

$$ax^2+bx+c\equiv\frac{(ax^2+bx+c)+(a(-x)^2+b(-x)+c)}{2}+$$
$$+\frac{(ax^2+bx+c)-(a(-x)^2+b(-x)+c)}{2}=\underbrace{ax^2+c}_{\varphi(x)}+\underbrace{bx}_{\psi(x)}.$$

Монотонные функции. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X, если для любых $x_1,x_2\in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Например, функция $y = x^3 + 1$ возрастает на всём множестве $\mathbb{R}$, поскольку для любых $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)=x_1^3+1<x_2^3+1=f(x_2)$. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ и убывает на отрезке $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$; дробно-рациональная функция $y = 1/x$ убывает на каждом из промежутков $x\in(-\infty,0)$ и $x\in(0,+\infty)$.

Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей* (*неубывающей*) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \leq f(x_2)$).

Иными словами, функция возрастает (убывает) на множестве X, если большему значению аргумента она ставит в соответствие большее (соответственно, меньшее) значение функции.

По аналогии с последовательностями, возрастающие и убывающие функции называют (строго) *монотонными* функциями. Исследовать функцию на монотонность означает найти промежутки её возрастания и убывания. Наряду с убывающими и возрастающими, к монотонным относят неубывающие и невозрастающие функции.

Примеры: $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ — возрастающие функции; $y = \log_{0,1} x$, $y = -x^3$, $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ — убывающие функции; $y = [x]$ (целая часть числа x, антье) и $y = \operatorname{sgn} x$ (сигнум, знак числа x) — неубывающие функции.

Конечно, не все функции являются монотонными на своей области определения. Существуют немонотонные функции: $y = x^2$, $y = |x|$, $y = \sin x$, $y = \{x\}$ или, например, функция Дирихле́:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}, \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

Периодические функции. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *периодической*, если существует такое не равное нулю число $T \in \mathbb{R}$ (называемое *периодом*), что для любого $x \in X$ числа $x \pm T$ также принадлежат множеству X, и при этом $\forall x \in X$ выполняется условие периодичности: $f(x + T) = f(x)$. Наименьший положительный период (при условии, что он существует) называется *главным*, или *основным*, *периодом* функции.

Примеры периодических функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$ (главный период $T = 2\pi$), $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (главные периоды равны π), $y = \{x\}$ (дробная часть числа x, главный период равен 1).

Класс периодических функций весьма широк, так как любая сложная функция $y = f(g(x))$, у которой «внутренняя» функция $g(x)$ является периодической, также будет периодической.

Например, функция $y = \dfrac{5\cos x - 1}{\cos^2 x - 3\cos x}$ является периодической, поскольку её можно представить в виде $y = f(g(x))$, где $g(x) = \cos x$ (периодическая функция), а $f(g) = \dfrac{5g - 1}{g^2 - 3g}$ («внешняя» функция может быть любой, не обязательно периодической).

Из определения периодической функции вытекают её *свойства*:

1) если периодическая с периодом T функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке x_0, то она определена во всех точках вида $x_0 + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, и принимает в них то же значение: $f(x_0 + Tn) = f(x_0)$. Если же периодическая с периодом T функция не определена в точке x_0, то она не определена и во всех точках вида $x_0 + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$;

2) график периодической функции представляет собой последовательность одинаковых повторяющихся участков длиной, равной периоду T;

3) если периодическая функция дифференцируема, то её производная также является периодической функцией;

4) если функция $y = f(x)$ периодична с периодом T, то функция $y = a \cdot f(bx + c) + d$, где a, b, c, d — заданные коэффициенты, также периодична, причём её период равен $\dfrac{T}{|b|}$;

Например, период функции $f(x) = 13\cos 5x$ равен $\dfrac{2\pi}{5}$, а у функции $f(x) = -2\mathrm{tg}\dfrac{x}{7} + 6$ период равен 7π.

---

5) если даны две периодические функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ с периодами, соответственно, T_1 и T_2, то период их суммы, разности, произведения и частного (при условии, что он существует) будет равен наименьшему положительному числу, которое при делении на T_1 и T_2 дает в частном целые числа.

Например, функция $y = 5\sin 3x$ периодична с периодом $T_1 = 2\pi/3$, а функция $y = \cos 2x$ имеет период $T_2 = \pi$. Их сумма $y = 5\sin 3x + \cos 2x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$.

Однако не всегда сумма двух периодических функций является периодической функцией.

Например, обе функции $y = \sin x$ и $y = \cos \pi x$ являются периодическими. Но так как их периоды несоизмеримы (один из них $T_1 = 2\pi$ иррационален, а другой $T_2 = 2$ — рационален), то общий период T не существует, а значит функция $y = \sin x + \cos\pi x$ не является периодической.

---

6) постоянная функция $y = \mathrm{const}$ удовлетворяет определению периодической функции, при этом в качестве периода у неё может выступать произвольное положительное действительное число. Однако у данной функции не существует главного периода, так как не существует наименьшего положительного действительного числа.

Выпуклые функции. Точки перегиба. Сформулируем определение выпуклой вниз (вверх) функции, в основе которого лежит неравенство Йе́нсена[1]. Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется

---

[1] *Йенсен Йоганн Людвиг* (1859—1925) — датский математик, занимался теорией функций. Сформулировал основы теории выпуклых функций.

выпуклой вниз на этом отрезке, если для любых $x_1, x_2 \in [a,b]$ выполнено неравенство:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Если это неравенство является строгим при любых $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_1 \ne x_2$, то функцию $f(x)$ называют *строго выпуклой вниз* на отрезке $[a, b]$. Геометрически выпуклость вниз означает, что любая хорда графика лежит не ниже стягиваемой ею дуги кривой.

Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой вверх*[1] *на этом отрезке, если* $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ *верно неравенство*

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Существует другое, эквивалентное данному, определение: функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой вниз* на этом отрезке, если при всех $x_1, x_2 \in [a,b]$ и произвольных $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, выполнено неравенство

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \le p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2).$$

Если в последнем неравенстве заменить знак «≤» на знак «≥», то получим определение функции, выпуклой вверх.

Между выпуклыми вниз и вверх функциями существует простая связь: функция f выпукла вверх тогда и только тогда, когда функция $(-f)$ выпукла вниз.

Точка $(x_0, f(x_0))$, принадлежащая графику функции, называется *точкой перегиба*, если в этой точке существует касательная к графику, причём справа и слева от этой точки функция имеет разные направления выпуклости.

Например, точка (0, 0) является единственной точкой перегиба для графика функции $y = x^3$, а точки $(\pi n, 0)$ являются точками перегиба для синусоиды $y = \sin x$.

Понятие обратной функции. Свойства взаимно обратных функций. Пусть функция $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}$, такова, что разным значениям аргумента ставит в соответствие разные значения функции, т.е. из неравенства $x_1 \ne x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ следует неравенство $f(x_1) \ne f(x_2)$. Тогда такая функция называется *обратимой*, и у неё существует *обратная функция*, которую обозначают $y = f^{-1}(x)$. Обозначим Y — область значений функции $f(x)$. Обратная функция определена на множестве Y и каждому $y \in Y$ ставит в соответствие единственное $x \in X$ такое, что $y = f(x)$.

[1] Иногда такие функции называют *вогнутыми*.

Пусть дана функция $y = f(x)$, $x \in X$. Чтобы найти обратную функцию, надо: 1) выразить из равенства $y = f(x)$ переменную x через переменную y. Получим: $x = f^{-1}(y), y \in Y$ (не путать со степенью (–1), это просто условное обозначение); 2) заменить переменную x в последнем равенстве на y, а y, наоборот, заменить на x. Получим $y = f^{-1}(x), x \in Y$. Обратная функция найдена.

Свойства взаимно обратных функций.

1. Область определения $D(f) = \{x \mid x \in X\}$ исходной функции является для обратной функции областью значений, и наоборот, область значений $E(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$ исходной функции является для обратной функции областью определения, т.е.

$$D(f) = E(f^{-1}), \quad E(f) = D(f^{-1}).$$

Например, рассмотрим пару взаимно обратных функций $y = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и $y = \arcsin x, x \in [-1,1]$. Отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ для синуса является в данном случае областью определения, а для арксинуса — областью значений. При этом отрезок [–1, 1] для синуса является областью значений, а по отношению к арксинусу — его областью определения.

2. Чтобы найти обратную функцию, необходимо уравнение $y = f(x)$ разрешить относительно переменной x, т.е. привести к виду $x = f^{-1}(y), y \in E_f$, а затем поменять местами переменные x и y: $y = f^{-1}(x), x \in E_f$.

Найдём, например, обратную функцию для функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке [0, 4] (обратная функция существует, поскольку $y = \sqrt{x}$ возрастает на указанном отрезке). Заметим, что $y \in [0,2]$ (это будущая область определения для обратной функции). Выражая x из данного равенства, получим: $x = y^2$, где $y \in [0,2]$. Осталось поменять x на y, а y на x: $y = x^2$, $x \in [0,2]$. Обратите внимание на то, что графики этих функций симметричны друг другу относительно $y = x$.

---

3) Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ $(x \in D_f)$, и $y = f^{-1}(x)\,(x \in E_f)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Симметрия возникает в момент замены x на y, а y на x.

---

4) Справедливы тождества:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in D_f), \quad f(f^{-1}(x)) = x \quad (x \in E_f).$$

Например, $\arcsin(\sin x) = x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ и $\sin(\arcsin x) = x \quad (x \in [-1,1])$.

Или: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \ \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \ (x \in \mathbb{R})$.

---

5) Взаимно обратные функции всегда имеют одинаковую монотонность (обе возрастают или обе убывают — каждая на своём множестве).

Например, функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и поэтому обратная к ней функция $y = \arcsin x$ также возрастает (на отрезке $x \in [-1, 1]$).

Важно: если функция $y = f(x)$ является строго монотонной, то у неё всегда существует обратная функция.

Локальные и глобальные экстремумы. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 своей области определения *локальный максимум* (*минимум*), если найдётся окрестность этой точки, всюду в пределах которой функция определена и принимает значения меньшие либо равные (соответственно, бóльшие либо равные) значению функции в этой точке x_0. Иными словами, функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум* (*минимум*), если найдётся окрестность этой точки такая, что для любого x из указанной окрестности верно неравенство: $f(x) \le f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \ge f(x_0)$). Если последние неравенства строгие (для всех x из окрестности, отличных от x_0), то получим определения точек *строгого локального максимума* (*соответственно, минимума*).

Локальным максимумом (*минимумом*) функции называется значение функции в точке локального максимума (минимума). Локальные максимумы и минимумы называют единым термином — *локальные экстремумы*.

Например, функция $y = \sin x$ в точках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеет (строгие) локальные максимумы, равные 1. Функция $y = |x|$ имеет в точке $x = 0$ единственный строгий локальный минимум, равный 0. Постоянная функция $y \equiv 1$ имеет в любой точке x нестрогий локальный максимум (и одновременно нестрогий локальный минимум), равный 1. Функция $y = x$ (и, вообще, любая строго монотонная функция) и функция Дирихле не имеют локальных экстремумов.

Заметим, что слева от точки локального максимума функция не обязательно возрастает, а справа — убывает. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \ne 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ строгий локальный максимум, но при этом слева от этой точки она убывает, а справа — возрастает!

Наряду с понятием локального экстремума существует понятие глобального экстремума. *Глобальным экстремумом* функции $f(x)$ на множестве X называется её наибольшее или наименьшее значение на этом множестве.

Напомним определение наибольшего значения функции. Число A называется наибольшим значением функции $f(x)$ на *множестве* X, если:

1) для любого $x \in X$ справедливо $f(x) \le A$;
2) существует $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = A$.

Если экстремум достигается на границе множества, то его называют *краевым экстремумом*. Например, функция $y = \sqrt{x}$, $x \ge 0$, имеет в точке $x = 0$ краевой минимум.

Декартова и полярная системы координат. Декартова (прямоугольная) система координат на плоскости определяется заданием начала координат (точка O), масштабной единицы и двух взаимно перпендикулярных числовых осей: оси абсцисс (Ox) и оси ординат (Oy). Каждой точке плоскости ставятся в однозначное соответствие два действительных числа — координаты точки (x, y) (x называется абсциссой, y — ординатой).

В *полярной системе* координат каждой точке плоскости также ставятся в соответствие две координаты (r, φ), но смысл их другой, это — *расстояние* $r \ge 0$ от точки до начала координат (полюса) и *угол* φ, откладываемый от полярной оси против часовой стрелки (в полюсе угол не определен однозначно).

Если совместить начала координат у прямоугольной и полярной систем координат и пустить полярную ось вдоль оси абсцисс, выбрав одинаковые масштабные единицы, то декартовы координаты будут выражаться через полярные по следующим формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Например, в прямоугольной системе координат окружность радиуса a с центром в начале координат задается неявно уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$. Для перехода к полярным координатам в этом уравнении подставим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi : (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2$. После упрощения получим уравнение той же окружности, но в полярной системе координат: $r = a$.

Явный, неявный и параметрический способы задания функции. В любой из указанных выше систем координат функция может быть задана: явным образом, неявно и параметрически.

В декартовых координатах на плоскости функция, заданная уравнением, разрешённым относительно y, т.е. уравнением вида $y = f(x)$, $x \in X$, называется заданной *явно*.

Например, уравнение $y = \sqrt{1 - x^2}$ явно определяет *верхнюю полуокружность* единичного радиуса с центром в начале координат. Пример явного задания кривой в полярных координатах: $r = \varphi$, $\varphi \ge 0$ (*спираль Архимеда*).

Если зависимость y от x задаётся уравнением $F(x,y) = 0$, не разрешённым относительно переменной y, то говорят о *неявном* задании функции.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт единичную окружность с центром в начале координат.

Наконец, функция (в общем случае — плоская кривая) может определяться системой двух уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$ с параметром t из заданного множества $T \in \mathbb{R}$ (функции $x(t)$ и $y(t)$ будем считать непрерывными). В этом случае речь идет о *параметрическом* задании.

Например, система параметрических уравнений $x = \cos t$, $y = \sin t$, где $t \in [0,2\pi)$, задаёт ту же единичную окружность с центром в начале координат.

Элементарные функции. К *основным элементарным функциям* относятся:

— алгебраический многочлен n-й степени

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0);$$

— рациональная функция в виде отношения двух многочленов; в том числе степенна́я функция ($y = x^a$);

— показательная ($y = a^x$) и логарифмическая ($y = \log_a x$) функции, в которых $a > 0$, $a \neq 1$;

— тригонометрические функции ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$) и обратные тригонометрические функции ($y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$).

Элементарные функции — это функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня n-степени и возведение в целую степень) и композиций из перечисленных выше основных элементарных функций.

Ниже будут определены *гиперболические функции* ($y = \mathrm{sh}\, x$, $y = \mathrm{ch}\, x$, $y = \mathrm{th}\, x$, $y = \mathrm{cth}\, x$). Так как они (и обратные к ним) могут быть выражены через перечисленные выше основные элементарные функции, то указанные функции также относятся к элементарным.

Гиперболические функции обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам тригонометрических функций. Подобно тому как тригонометрические синус и косинус являются координатами точки на координатной окружности, гиперболические синус и косинус являются координатами точки на гиперболе и поэтому дают её параметрическое представление

$$x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{ch}\, t, \\ y = \mathrm{sh}\, t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Гиперболическим синусом действительного числа x называется функция

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

нечётная и монотонно возрастающая на всей числовой прямой. Её график проходит через начало координат, причём касательная в этой точке имеет угол наклона 45°.

Гиперболическим косинусом называется чётная положительная функция

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

определённая на всей числовой прямой. Её график имеет минимум, равный единице, при $x = 0$.

Однородная цепь, свободно подвешенная за свои концы, приобретает форму графика функции $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(a > 0)$, в связи с чем график гиперболического косинуса иногда называют *цепной линией*. Это обстоятельство используется при проектировании арок, поскольку форма арки в виде перевёрнутой цепной линии наиболее удачно распределяет нагрузку.

Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Это нечётная, монотонно возрастающая функция. Её график проходит через начало координат под углом 45° и имеет две горизонтальные асимптоты $y = -1$ (при $x \to -\infty$) и $y = 1$ (при $x \to +\infty$).

Гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Это нечётная функция, определённая на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$. График состоит из двух ветвей и имеет три асимптоты: вертикальную, совпадающую с осью ординат, и две горизонтальные $y = \pm 1$.

Гиперболические формулы имеют свои тригонометрические аналоги и доказываются во многом аналогично.(*)[1]

---

1. Основное гиперболическое тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

а также $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$.

2. Формулы $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $(x \neq 0)$.

3. Формулы сложения:

[1] Материал, помеченный символом (*), относится к дополнительному, который следует принять к сведению.

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}.$$

4. Формулы двойного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x}{2},$$

$$\operatorname{ch} 2x \pm \operatorname{sh} 2x = (\operatorname{sh} x \pm \operatorname{ch} x)^2.$$

5. Формулы универсальной подстановки:

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \operatorname{ch} 2x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}.$$

6. Формулы понижения степени:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}.$$

7. Формулы $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{ch} 2x} = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\operatorname{sh} 2x}$.

8. Формулы суммы и разности синусов (косинусов):

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}.$$

9. Формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)}{2},$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y)}{2},$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)}{2}.$$

10. Чётность (нечётность) гиперболических функций:

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x;$$

11. При всех $x \in \mathbb{R}$ имеем неравенства:

$$0 \le \operatorname{ch} x - 1 \le |\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x; \quad |x| \le |\operatorname{sh} x|, \quad |\operatorname{th} x| < 1.$$

Примеры элементарных функций: линейная функция $y = ax + b$ (график — прямая линия), квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \ne 0$, график — парабола), дробно-линейная функция $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (общий случай: $c \ne 0, ad \ne bc$, график — гипербола), модуль числа $y = |x|$, кубический многочлен $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (график — кубическая парабола), квадратный ($y = \sqrt{x}$) и кубический корни ($y = \sqrt[3]{x}$), показательно-степенная функция $y = f(x)^{g(x)}$ ($f(x) > 0$), где $f(x), g(x)$ — любые элементарные функции и т.п.

Примеры неэлементарных функций.(*) Помимо элементарных выделяют *специальные функции* — встречающиеся в различных приложениях математики (чаще всего — в различных задачах математической физики) функции, которые не выражаются через элементарные функции. Специальные функции обычно представляются в виде рядов и интегралов. Например, гамма-функция Эйлера $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ обобщает понятие факториала с натурального n на нецелые значения $x > 0$. Дзета-функция Римана $\zeta(s) = \dfrac{1}{1^s} + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \ldots$ задаётся рядом и др. Приведём другие известные примеры неэлементарных функций.

1. Функция «сигнум» (знак числа):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Функция Дирихле́:[1]

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

3. Функции $y = [x]$ (антье́, или целая часть действительного числа x), $y = \{x\}$ (манти́сса, или дробная часть числа x).[2]

4. Если функция является кусочно-заданной, т.е. на разных участках своей области определения задаётся аналитически по-разному, то её, вообще говоря, следует отнести к неэлементарным функциям, например:

---

[1] *Дирихле́ Иоганн Петер* (1805—1859) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел.

[2] *Целой частью* числа $x \in R$ называется наибольшее целое число, не превосходящее x. *Дробной частью* x называется, по определению, разность: $\{x\} = x - [x]$.

$$f(x)=\begin{cases}3x-7, & \text{если } x>1,\\ \ln(|x|+1), & \text{если } x\le 1.\end{cases}$$

Неэлементарные функции могут быть также заданы с помощью таблиц, графиков, диаграмм, пределов и проч.

2.2. Предел функции одной переменной

«Из дома реальности легко забрести в лес математики, но лишь немногие способны вернуться обратно».

Гуго Штейнхаус (1887—1972), польский ученый, один из основоположников Львовской математической школы, популяризатор науки и афорист.

Понятие предела функции. Виды пределов. Предел функции, так же как и предел последовательности, относится к основным понятиям математического анализа. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ и a — предельная точка этого множества (т.е. в любой, сколь угодно малой окрестности точки a находится хотя бы одна точка из X, отличная от a).[1] Сформулируем два эквивалентных между собой определения (конечного) предельного значения функции в (конечной) точке.

Опр. 1′ (*предела функции в точке* по Коши[2], или на языке «ε — δ»). Число b называется *пределом* (*предельным значением*) функции $y = f(x)$ в точке a (или при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другое определение опирается на понятие сходящейся последовательности.

Опр. 1″ (*предела функции в точке* по Гейне[3], или на языке последовательностей). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любой последовательности значений аргумента x_n, сходящейся к a и состоящей из чисел, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к числу b.

Для обозначения введённого предела функции используется запись вида:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b, \quad \text{или} \quad f(x)\to b \text{ при } x\to a.$$

---

[1] Сама точка a может как принадлежать, так и не принадлежать X.

[2] *Коши Огюстен Луи* (1789—1857) — французский математик.

[3] *Гейне Генрих Эдуард}* (1821—1881) — немецкий математик.