

**ЭФФЕКТИВНАЯ  
ПОДГОТОВКА  
К ЕГЭ**

**ЕГЭ**

**2018**

**В. В. Мирошин, А. Р. Рязановский**

**МАТЕМАТИКА**

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ**

---

**СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!**

  
**МОСКВА  
2017**



УДК 373:51  
ББК 22.1я721  
Р99

**Рязановский, Андрей Рафаилович.**

**Р99** ЕГЭ 2018. Математика. Решение задач. Сдаем без проблем! /  
А. Р. Рязановский, В. В. Мирошин. — Москва : Эксмо, 2017. —  
496 с. — (ЕГЭ. Сдаем без проблем).

ISBN 978-5-699-97893-9

Издание адресовано *учащимся старших классов* для подготовки к ЕГЭ по математике.

Пособие содержит полезную информацию для решения задач, основные понятия, определения, формулы, а также подробные решения более 500 задач. С помощью данного пособия учащийся сможет научиться решать задачи разного уровня сложности.

Издание окажет помощь учащимся не только при подготовке к ЕГЭ, но к дополнительным вступительным испытаниям по математике, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

**УДК 373:51  
ББК 22.1я721**

ISBN 978-5-699-97893-9

© Рязановский А. Р., Мирошин В. В., 2017  
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2017

## Введение

Данная книга адресована в первую очередь тем, кто желает успешно подготовиться к *вступительным экзаменам* в вуз и к *единому государственному экзамену* (ЕГЭ) по математике и получить высокие баллы. Поскольку ЕГЭ — это не только выпускной школьный экзамен, но и вузовский вступительный экзамен, предусматривающий проверку знаний по всему школьному курсу, в пособие включены задачи и краткие справочные материалы по всему курсу математики: как по арифметике и алгебре для 7—11 классов, так и по курсу начал анализа 10—11 классов. При этом мы хотели, не перегружая пособие излишними подробностями, а тем более — теоретическими выкладками и доказательствами, сосредоточить внимание на решении задач и в первую очередь на решении задач повышенной сложности.

Пособие включает восемь глав. Каждая глава начинается с краткого перечисления некоторых теоретических сведений с краткими комментариями, позволяющими вспомнить соответствующий материал. Затем приводятся примеры решения задач различного уровня сложности и упражнения, позволяющие лучше понять и запомнить рассмотренные способы решения задач. Заканчивается каждая глава набором задач для самостоятельного решения. Эти задания взяты из различных сборников и из разрешенных для публикации (открытых) вариантов ЕГЭ.

Как рекомендуется работать с пособием? Сначала внимательно прочтите и изучите теоретическое введение к данной теме. Изложение теории сопровождается иллюстрирующими примерами и задачами. Прочитав задачу, попытайтесь решить ее самостоятельно, не заглядывая в решение, предложенное в пособии. Не исключено, что ваше решение может оказаться более рациональным или оригинальным. Если же все ваши попытки окажутся безуспешными, посмотрите на-

чало решения, указанного в пособии. Не исключено, что вам будет достаточно какой-то начальной идеи, чтобы завершить решение задачи самостоятельно. И только если и в этом случае задачу решить не удастся, ознакомьтесь с ее полным решением, предложенным в пособии. После этого *обязательно перерешайте задачу* от начала и до конца.

Мы уверены, что пособие поможет вам успешно сдать вступительные экзамены и поступить в вуз.

***Желаем успеха!***

# ГЛАВА 1

---

---

## ЧИСЛА. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

### § 1. Основные понятия и определения

Основным числовым множеством, которое изучается в школе, является множество  $R$  действительных чисел. Любое число  $x \in R$  является или рациональным, или иррациональным числом. Таким образом, множество действительных чисел есть объединение двух множеств: множества  $Q$  рациональных чисел и множества  $\bar{Q}$  иррациональных чисел:  $R = Q \cup \bar{Q}$ . Действительные числа удобно изображать в виде точек числовой прямой. При этом каждая точка числовой прямой изображает некоторое действительное число, и наоборот, каждое действительное число представляется некоторой точкой числовой прямой. Причем различным точкам соответствуют различные действительные числа.

Множество чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $a \leq x \leq b$ , называется *отрезком* и обозначается  $[a; b]$ . Множество чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $a < x \leq b$  или  $a \leq x < b$ , называется *полуинтервалом* и обозначается соответственно  $(a; b]$  и  $[a; b)$ . Множество чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $a < x < b$ , называется *интервалом* и обозначается  $(a; b)$ . Каждое из указанных множеств называется промежутком и может быть (в общем случае) обозначено  $\langle a; b \rangle$ .

Каждое рациональное число  $r \in Q$  можно представить в виде отношения целого числа  $m$  к натуральному числу  $n$ :  $r = \frac{m}{n}$ , где  $n \in N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ ,  $m \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$ . Таким образом, каждое натуральное число, нуль и любое целое отрицательное число являются рациональными, поскольку  $n = \frac{n}{1}$ ,  $0 = \frac{0}{1}$  и  $-n = \frac{-n}{1}$ . Рациональными числами

являются, очевидно, все обыкновенные и конечные десятичные дроби, а также, что уже менее очевидно, все бесконечные периодические десятичные дроби. Действительно, если считать правило сложения «столбиком» верным и для бесконечного числа десятичных дробей, т.е. считать верным, например, следующее равенство:

$$0,(1) = 0,1111\dots 1\dots = 0,1 + 0,001 + \dots + 0,\overbrace{000\dots 01}^{(n-1)\text{нуль}} + \dots,$$

то, воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии  $S = \frac{a_1}{1-q}$  со знаменателем  $q = 0,1$  и первым членом  $a_1 = 0,1$ , получим  $0,(1) = \frac{0,1}{1-0,1} = \frac{0,1}{0,9} = \frac{1}{9}$ .

Аналогично можно показать, что для любой чистой периодической десятичной дроби  $0,(a_1 a_2 \dots a_n)$ , дробная часть которой содержит только повторяющуюся группу цифр (период)  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ , справедлива следующая **формула записи чистой периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби**:

$$0,(a_1 a_2 \dots a_n) = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{\overbrace{99\dots 9}^{n \text{ девяток}}}.$$

Например,  $0,(1) = \frac{1}{9}$ ;  $0,(2) = \frac{2}{9}$ ;  $0,(9) = \frac{9}{9} = 1$ ;  $0,(17) = \frac{17}{99}$ ;

$$0,(1323) = \frac{1323}{9999} = \frac{147}{1111}.$$

В случае смешанной периодической дроби поступают следующим образом:

$$0,78(1323) = \frac{78,(1323)}{100} = \frac{78 + 0,(1323)}{100} = \frac{78 + \frac{1323}{9999}}{100}.$$

Выполнив сложение, получим  $0,78(1323) = \frac{781245}{999900}$ .

Число  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ , которое нельзя представить в виде отношения целых чисел, называется иррациональным числом. Отсюда следует, что **любое иррациональное число записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби**. Но бесконечное число десятичных знаков записать невозможно! Поэтому для иррациональных чисел выбирают спе-

циальные обозначения в виде символов или букв. Например, иррациональными являются следующие числа  $\sqrt{17}$ ;  $\sqrt[4]{15}$ ;  $5^{6,3}$ ;  $\log_7 10$ ;  $\sin \frac{\pi}{5}$ , при записи которых использованы символы  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ ,  $\log_a$ ;  $\sin$ . Иррациональными являются, например, числа  $\pi = 3,1415\dots$  и  $e = 2,718281828\dots$ .

Замечательным свойством действительных чисел, и в частности рациональных чисел, является тот факт, что рациональные числа расположены «между» действительными числами весьма плотно: *между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел.*

**Пример 1.** Среди всех обыкновенных несократимых дробей  $\frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , лежащих между дробями а)  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{2}{3}$ ; б)  $\frac{16}{21}$  и  $\frac{17}{21}$ ; в)  $\frac{5}{17}$  и  $\frac{1}{3}$ , найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

*Решение.* а) Пусть  $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{2}{3}$ . Тогда  $3n < 6m < 4n$ . Таким образом, на интервале  $(3n; 4n)$  требуется найти наименьшее кратное 6. При  $n=1; 2; 3; 4$  интервал  $(3n; 4n)$  не содержит кратных 6. При  $n=5$  интервал  $(3n; 4n)$  имеет вид  $(15; 20)$ , на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно:  $18=6 \cdot 3$ , т.е.  $m=3$ . Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь  $\frac{3}{5}$ .

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите б)  $\frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}$ ; в)  $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$ .

**Пример 2.** При каком значении параметра  $a$  на интервале  $(5 - 2a; 2a + 7)$  лежит ровно 101 целое число?

*Решение.* При любом  $a$  серединой интервала  $(5 - 2a; 2a + 7)$  является число  $x_0 = \frac{(5 - 2a) + (2a + 7)}{2} = 6$ . Следовательно, чтобы на интервале  $(5 - 2a; 2a + 7)$  лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в пра-

вой полуокрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \leq 57 \Leftrightarrow 24,5 < a \leq 25.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те  $a$ , для которых  $24,5 < a \leq 25$ .

Для натуральных чисел справедлива **основная теорема арифметики**:

Каждое натуральное число  $n$ , большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k,$$

где  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  — простые числа. Напомним, что натуральное число  $p > 1$  называется **простым числом**, если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и  $p$ . Натуральное число  $p > 1$ , не являющееся простым, называется **составным числом**. Множество простых чисел — бесконечное множество.

**Пример 3.** Решите уравнение  $x^2 - px + q = 0$ , где  $p, q$  — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

*Решение.* Пусть  $x$  — простой корень данного уравнения. Тогда  $x \neq 0$  и данное уравнение равносильно уравнению  $x = p - \frac{q}{x}$ . Отсюда следует, что число  $\frac{q}{x}$  — целое. Значит, число  $x$  — делитель числа  $q$ . По условию  $x$  и  $q$  — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно,  $x = q$ . Подставляя  $x = q$  в данное уравнение, находим  $q = p - 1$ . Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , а его корни 1 и 2.

На множестве  $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$  целых чисел определена особая операция: **деление с остатком**. Справедлива теорема:

Для любых целых чисел  $a$  и  $b$  существуют единственные целое число  $c$  и целое неотрицательное число  $r$  такие, что  $a = bc + r$ , причем  $0 \leq r < |b|$ .



При  $r > 0$  число  $c$  называется **неполным частным** от деления  $a$  на  $b$ ; при  $r=0$  число  $c$  есть **частное** от деления  $a$  на  $b$ ;  $b$  — **делитель**  $a$ ;  $a$  — **кратное**  $b$ . Говорят также, что **число  $b$  делит число  $a$** . Записывают это так:  $b|a$  или, что то же самое, **число  $a$  делится на  $b$** :  $a:b$ . Из определения делимости натуральных чисел следует, что если  $b|a$ , то  $1 \leq b \leq a$ . Поэтому число натуральных делителей натурального числа  $a$  конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

**Пример 4.** Определите последнюю цифру числа  $3^{4567}$ .

*Решение.* Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3:  $3^0=1$ ,  $3^1=3$ ,  $3^2=9$ ,  $3^3=27$ ,  $3^4=81$ ,  $3^5=243$ , ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; ... . Период этой последовательности равен 4. Поскольку  $4567=1141 \cdot 4 + 3$ , то последней цифрой данной степени является число 7.

При решении задач на натуральные числа полезны следующие понятия.

1. **Наибольший общий делитель натуральных чисел  $a$  и  $b$ :**  
**НОД( $a$ ;  $b$ ).**
2. **Наименьшее общее кратное натуральных чисел  $a$  и  $b$ :**  
**НОК[ $a$ ;  $b$ ].**

Смысл этих понятий ясен из их названий. Например,  $\text{НОД}(12; 32)=4$ . Действительно, общими делителями чисел 12 и 32 являются числа 1; 2; 4. Других общих делителей эти числа не имеют. Из всех общих делителей 1; 2; 4 чисел 12 и 32 наибольшим является число 4. Поэтому наибольшим общим делителем 12 и 32 является число 4. В общем случае, если требуется найти наибольший общий делитель  $\text{НОД}(a; b)$  двух натуральных чисел, можно использовать их разложение на простые множители или воспользоваться **алгоритмом Евклида**. В нашем случае алгоритм Евклида выглядит следующей цепочкой равенств:

$$32=12 \cdot 2 + 8; \quad 12=8 \cdot 1 + 4; \quad 8=4 \cdot 2.$$

Последний ненулевой остаток, равный в данном случае 4, и является  $\text{НОД}(12; 32)$ .

Второй пример. Найдем НОК[12; 32]. Для этого разложим числа 12 и 32 в произведение простых сомножителей:  $12=2^2 \cdot 3$ ;  $32=2^5$ . Ясно, чтобы натуральное число  $k$  было общим кратным чисел 12 и 32, т.е. чтобы  $k$  делилось на 12 и на 32, необходимо и достаточно, чтобы  $k=2^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot m$ , где  $m \in \mathbb{N}$ . Отсюда при  $m=1$  получим наименьшее общее кратное чисел 12 и 32. Поэтому  $\text{НОК}[12; 32]=96$ .

В общем случае для нахождения наименьшего общего кратного  $\text{НОК}[a; b]$  двух натуральных чисел  $a$  и  $b$ , где  $a \geq b$ , обычно сначала с помощью алгоритма Евклида находят  $\text{НОД}(a; b)$ , а затем используют равенство  $\text{НОК}[a; b] \text{НОД}(a; b)=ab$ . В нашем случае

$$\text{НОК}[12; 32]=\frac{12 \cdot 32}{\text{НОД}(12; 32)}=\frac{12 \cdot 32}{4}=96.$$

Получили тот же самый результат.

Наибольший общий делитель  $\text{НОД}(a; b)$  натуральных чисел  $a$  и  $b$ , где  $a > b$ , обладает некоторыми полезными свойствами. Отметим наиболее очевидные.

1.  $\text{НОД}(a; b)=\text{НОД}(ka; kb)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ;
2.  $\text{НОД}\left(\frac{a}{k}; \frac{b}{k}\right)=\frac{\text{НОД}(a; b)}{k}$ ;
3.  $\text{НОД}(a; b)=\text{НОД}(a; a \pm b)$ .

**Пример 5.** Целые числа  $m$  и  $n$  не имеют общих делителей, отличных от 1 и  $-1$ . Является ли дробь  $\frac{5m-3n}{2m+5n}$  сократимой при некоторых натуральных  $m$  и  $n$ ?

*Решение.*

Пусть

$$d=\text{НОД}(5m-3n; 2m+5n) > 1.$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} 5m-3n=dk, \\ 2m+5n=ds, \end{cases}$$

где числа  $k$  и  $s$  взаимно просты. Значит, дробь можно сократить только на один из делителей числа  $d$ , отличный от 1.

Запишем  $m=\frac{5k+3s}{31}d$ ,  $n=\frac{5s-2k}{31}d$ . Отсюда  $d=31q$ .

Можно рассуждать иначе. Запишем дробь в виде

$$\frac{5m-3n}{2m+5n} = 2 + \frac{1}{\frac{2m+5n}{m-13n}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{31n}{m-13n}} \quad (\text{при } m-13n \neq 0).$$

Данная дробь сократима тогда и только тогда, когда сократима дробь  $\frac{31n}{m-13n}$ . Но числа  $m$  и  $n$  не имеют общих делителей, поэтому дробь может быть сокращена на число 31 или на кратное ему. Например, при  $m=23$ ,  $n=-3$  получаем дробь  $\frac{5m-3n}{2m+5n} = \frac{5 \cdot 23 + 9}{2 \cdot 23 - 15} = \frac{124}{31}$ , которая сократима на 31.

При решении различных задач повышенной сложности нередко типичной проблемой является **сравнение чисел**. Напомним, что сравнение рациональных чисел осуществляется с помощью определения:

$$\frac{a}{b} < \frac{m}{n} \xrightarrow{\text{онп.}} an < bm.$$

В других случаях помогает свойство транзитивности неравенств:

$$\frac{a}{b} > \alpha, \alpha > \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{m}{n}.$$

При сравнении дробей полезны следующие теоремы.

**Теорема.**

*Если числитель и знаменатель дроби положительны, то при их увеличении на одно и то же число неправильная дробь уменьшается, а правильная увеличивается, другими словами:*

если  $a > b > 0$  и  $c > 0$ , то  $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$  и  $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$ .

**Пример 6.** Сравните числа  $\frac{1222333}{1333222}$  и  $\frac{2222333}{2333222}$ .

*Решение.* Использовать для сравнения приведенное выше определение не хочется. Придется перемножить семизначные числа! Используя теорему, заметив, что поскольку дробь  $\frac{1222333}{1333222}$  правильная и  $\frac{2222333}{2333222} = \frac{1222333 + 1000000}{1333222 + 1000000}$ , то  $\frac{1222333}{1333222} < \frac{2222333}{2333222}$ .

При сравнении чисел, имеющих вид степени (или выражения с радикалами), используют теоремы, выражающие свойства степеней и радикалов.

**Теорема.**

Если  $a > 0$ ,  $b > 0$ , то  $a > b \Leftrightarrow a^\beta > b^\beta$ , где  $\beta$  — положительное число.

**Теорема.**

Если  $a > 1$  и  $\alpha > \beta$ , то  $a^\alpha > a^\beta$ ; если  $0 < a < 1$  и  $\alpha > \beta$ , то  $a^\alpha < a^\beta$ .

**Теорема.**

Если  $a \geq b \geq 0$ , то  $\sqrt[n]{a^m} \geq \sqrt[n]{b^m}$ , где  $n, m$  — натуральные числа.

**Пример 7.** Сравните числа  $2^{300}$  и  $3^{200}$ .

*Решение.* Поскольку  $2^{300} = (2^3)^{100}$ , а  $3^{200} = (3^2)^{100}$ , и  $2^3 < 3^2$ , то  $2^{300} < 3^{200}$ .

**Пример 8.** Сравните числа  $2^{\sqrt{3}}$  и  $3^{\sqrt{2}}$ .

*Решение.* Здесь более сложный случай. По свойству степеней с основанием, большим 1, имеем  $3^{\sqrt{2}} > 3^{1,4}$ , а  $2^{\sqrt{3}} < 2^2$ . Сравним теперь числа  $3^{1,4} = (3^{0,7})^2$  и  $2^2$ . Для этого достаточно сравнить  $3^{0,7}$  и 2 или  $(3^{0,7})^{10}$  и  $2^{10}$ . Но  $(3^{0,7})^{10} = 3^7 = 2187$ , а  $2^{10} = 1024$ . Теперь получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} 1024 < 2187 &\Leftrightarrow 2^{10} < 3^7 \Leftrightarrow 2 < 3^{0,7} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^2 < 3^{1,4} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{3}} < 2^2 < 3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

**Пример 9.** Сравните числа  $\sqrt[5]{5}$  и  $\sqrt[6]{6}$ .

*Решение.* Воспользуемся следующим свойством радикалов: если  $a > 0$ , то  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$ , где  $n, k$  — натуральные числа.

Получим  $\sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6}$  и  $\sqrt[6]{6} = \sqrt[30]{6^5}$ . Теперь достаточно сравнить степени  $5^6$  и  $6^5$ . Оценим их отношение:

$$\begin{aligned} \frac{5^6}{6^5} &= \frac{5}{\left(\frac{6}{5}\right)^5} = \frac{5}{(1+0,2)^5} = \frac{5}{(1+0,2)^2(1+0,2)^3} = \\ &= \frac{5}{(1+0,4+0,04)(1+0,6+0,12+0,008)} > \frac{5}{2 \cdot 2} > 1. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\frac{5^6}{6^5} > 1 \Leftrightarrow 5^6 > 6^5$  и, значит,  $\sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6}$ .

*Замечания.*

1) В данном случае степени  $5^6$  и  $6^5$  невелики, а именно  $5^6 = 15625$ ,  $6^5 = 7776$ , и их нетрудно вычислить «вручную», т.е. без калькулятора. Можно и без вычислений оценить степени:

$$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \cdot 125 > 10000,$$

$$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 36 \cdot 6 < 40 \cdot 40 \cdot 6 = 9600.$$

Поэтому  $5^6 > 10000 > 9600 > 6^5$ .

2) Если же степени действительно не поддаются вычислению (даже на калькуляторе), например,  $n^{n+1}$  и  $(n+1)^n$ , то можно использовать неравенство  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ , верное при любом натуральном  $n$ , и поступить так:

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > \frac{n}{3} \geq 1 \text{ при всех натуральных } n \geq 3.$$

**Упражнение.** Докажите самостоятельно неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

При сравнении чисел, которые являются значениями тригонометрических или логарифмических функций, обычно используются свойства соответствующих функций.

Перечислим некоторые свойства тригонометрических функций, связанные с неравенствами.

Если  $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$ , то  $\sin a \leq \sin b$  и  $\operatorname{tga} \leq \operatorname{tgb}$  (свойство монотонности).

Если  $0 < a \leq b < \pi$ , то  $\cos a \geq \cos b$  и  $\operatorname{ctga} \geq \operatorname{ctg} b$  (свойство монотонности).

Если  $0 < a \leq b < \pi$ , то  $\frac{\sin a + \sin b}{2} \leq \sin \frac{a+b}{2}$  (свойство выпуклости).

Если  $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$ , то  $\frac{\cos a + \cos b}{2} \leq \cos \frac{a+b}{2}$  (свойство выпуклости).

Если  $-1 \leq a \leq b \leq 1$ , то  $\arcsin a \leq \arcsin b$ , но  $\arccos a \geq \arccos b$  (свойство монотонности).

Если  $a \leq b$ , то  $\arctg a \leq \arctg b$ , но  $\operatorname{arccctg} a \geq \operatorname{arccctg} b$  (свойство монотонности).

**Пример 10.** Найдите множество значений функции<sup>1</sup>

$$y = \sin(0,5 \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x})).$$

*Решение.* Сначала установим область определения данной функции. Поскольку функция  $\sin t$  определена при любом  $t$ , то область определения данной функции совпадает с областью определения функции  $y = \arccost$ , где  $t = 0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x}$ . По определению  $\arccost$  определен только на отрезке  $-1 \leq t \leq 1$ . Решим неравенство

$$-1 \leq 0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x} \leq 1.$$

Получим

$$\begin{aligned} -1 \leq 0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x} \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \leq 1 + \sqrt{1-0,5x} \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{1-0,5x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-0,5x \leq 1, \\ 1-0,5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Итак, данная функция определена только на отрезке  $[0; 2]$ . При всех этих  $x$  имеем неравенство  $0,5 \leq 0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x} \leq 1$  и поэтому

$$\begin{aligned} \arccos 0,5 \geq \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x}) \geq \arccos 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 \leq \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x}) \leq \frac{\pi}{3} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 \leq 0,5 \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x}) \leq \frac{\pi}{6}. & \end{aligned}$$

Следовательно,

$$0 \leq \sin(0,5 \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1-0,5x})) \leq \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, множество значений данной функции есть отрезок  $\frac{1}{2}$ .

Перечислим некоторые свойства логарифмических функций, связанные с неравенствами.

<sup>1</sup> Другие задания на нахождение области значений функции см. в главе 2.

Если  $0 < a \leq b$  и  $c > 1$ , то  $\log_c a \leq \log_c b$  (свойство монотонности).

Если  $1 < a \leq b$  и  $c > 1$ , то  $0 < \log_b c \leq \log_a c$  (свойство монотонности).

**Пример 11.** Сравните числа  $\log_2 3$  и  $\log_3 4$ .

*Решение.* Здесь можно поступить так. Сравним числа

$$\log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad \log_3 4 - 1 = \log_3 \frac{4}{3}.$$

Рассмотрим следующую цепочку неравенств

$$\log_2 \frac{3}{2} > \log_2 \frac{4}{3} > \log_3 \frac{4}{3}.$$

Отсюда следует, что  $\log_2 3 > \log_3 4$ .

В данном случае возможен второй способ. Пусть  $\log_2 3 = a$ .

Тогда

$$\log_3 4 = 2 \log_3 2 = \frac{2}{\log_2 3} = \frac{2}{a}.$$

Рассмотрим функцию  $y = x - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 2}{x}$ . При  $x > 0$  значения этой функции положительны при  $x > \sqrt{2}$ , и отрицательны при  $0 < x < \sqrt{2}$ . Поэтому сравним числа  $a$  и  $\sqrt{2}$ , т.е.  $\log_2 3$  и  $\sqrt{2} = \log_2 2^{\sqrt{2}}$ . Для этого достаточно сравнить числа  $3$  и  $2^{\sqrt{2}}$ . Имеем цепочку неравенств  $2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \leq 2\sqrt{2} < 2 \cdot 1,5 = 3$ .

Отсюда  $\log_2 3 = a > \sqrt{2}$  и поэтому значение  $y(a) = a - \frac{2}{a} > 0$ . Следовательно,

$$\log_2 3 - \log_3 4 > 0 \Leftrightarrow \log_2 3 > \log_3 4.$$

Часто при решении задач повышенной сложности приходится выполнять тождественные преобразования для того, чтобы данное выражение стало удобно для исследования. В основе этих преобразований лежат различные формулы. Перечислим некоторые из них, которые встречаются наиболее часто.

## § 2. Формулы сокращенного умножения

1.  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .
2.  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .
3.  $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$ .