

**ЭФФЕКТИВНАЯ
ПОДГОТОВКА
К ЕГЭ**

ЕГЭ

2017

А. Р. Рязановский, В. В. Мирошин

МАТЕМАТИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!



**МОСКВА
2016**



УДК 373:51
ББК 22.1я721
Р99

Рязановский, Андрей Рафаилович.
Р99 ЕГЭ 2017. Математика. Решение задач. Сдаем без проблем! /
А. Р. Рязановский, В. В. Мирошин. — Москва : Эксмо, 2016. —
496 с. — (ЕГЭ. Сдаем без проблем).

ISBN 978-5-699-89286-0

Издание содержит более 500 заданий разных типов, решение задач повышенной сложности, краткий справочный материал. В конце пособия приведены ответы и комментарии.

Издание окажет неоценимую помощь учащимся при подготовке к ЕГЭ по математике, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-699-89286-0

© Рязановский А. Р., Мирошин В. В., 2016
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2016

**ЭФФЕКТИВНАЯ
ПОДГОТОВКА
К ЕГЭ**

ЕГЭ

2016

А.Р. Рязановский, В.В. Мирошин

МАТЕМАТИКА

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

СДАЕМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!


МОСКВА
2016



УДК 373:51
ББК 22.1я721
Р99

Рязановский, Андрей Рафаилович.
Р99 ЕГЭ 2016. Математика. Решение задач. Сдаем без проблем! /
А. Р. Рязановский, В. В. Мирошин. — Москва : Эксмо, 2016. —
496 с. — (ЕГЭ. Сдаем без проблем).

ISBN 978-5-699-79867-4

Издание содержит более 500 заданий разных типов, решение задач повышенной сложности, краткий справочный материал. В конце пособия приведены ответы и комментарии.

Издание окажет неоценимую помощь учащимся при подготовке к ЕГЭ по математике, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-699-79867-4

© Рязановский А. Р., Мирошин В. В., 2015
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2016

Введение

Данная книга адресована в первую очередь тем, кто желает успешно подготовиться к *вступительным экзаменам* в вуз и к *единому государственному экзамену* (ЕГЭ) по математике и получить высокие баллы. Поскольку ЕГЭ — это не только выпускной школьный экзамен, но и вузовский вступительный экзамен, предусматривающий проверку знаний по всему школьному курсу, в пособие включены задачи и краткие справочные материалы по всему курсу математики: как по арифметике и алгебре для 7—11 классов, так и по курсу начал анализа 10—11 классов. При этом мы хотели, не перегружая пособие излишними подробностями, а тем более — теоретическими выкладками и доказательствами, сосредоточить внимание на решении задач и в первую очередь на решении задач повышенной сложности.

Пособие включает восемь глав. Каждая глава начинается с краткого перечисления некоторых теоретических сведений с краткими комментариями, позволяющими вспомнить соответствующий материал. Затем приводятся примеры решения задач различного уровня сложности и упражнения, позволяющие лучше понять и запомнить рассмотренные способы решения задач. Заканчивается каждая глава набором задач для самостоятельного решения. Эти задания взяты из различных сборников и из разрешенных для публикации (открытых) вариантов ЕГЭ.

Как рекомендуется работать с пособием? Сначала внимательно прочтите и изучите теоретическое введение к данной теме. Изложение теории сопровождается иллюстрирующими примерами и задачами. Прочитав задачу, попытайтесь решить ее самостоятельно, не заглядывая в решение, предложенное в пособии. Не исключено, что ваше решение может оказаться более рациональным или оригинальным. Если же все ваши попытки окажутся безуспешными, посмотрите на-

чало решения, указанного в пособии. Не исключено, что вам будет достаточно какой-то начальной идеи, чтобы завершить решение задачи самостоятельно. И только если и в этом случае задачу решить не удастся, ознакомьтесь с ее полным решением, предложенным в пособии. После этого *обязательно перерешайте задачу* от начала и до конца.

Мы уверены, что пособие поможет вам успешно сдать вступительные экзамены и поступить в вуз.

Желаем успеха!

ГЛАВА 1

ЧИСЛА. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Основные понятия и определения

Основным числовым множеством, которое изучается в школе, является множество R действительных чисел. Любое число $x \in R$ является или рациональным, или иррациональным числом. Таким образом, множество действительных чисел есть объединение двух множеств: множества Q рациональных чисел и множества \bar{Q} иррациональных чисел: $R = Q \cup \bar{Q}$. Действительные числа удобно изображать в виде точек числовой прямой. При этом каждая точка числовой прямой изображает некоторое действительное число, и наоборот, каждое действительное число представляется некоторой точкой числовой прямой. Причем различным точкам соответствуют различные действительные числа.

Множество чисел x , удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называется *отрезком* и обозначается $[a; b]$. Множество чисел x , удовлетворяющих неравенству $a < x \leq b$ или $a \leq x < b$, называется *полуинтервалом* и обозначается соответственно $(a; b]$ и $[a; b)$. Множество чисел x , удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается $(a; b)$. Каждое из указанных множеств называется промежутком и может быть (в общем случае) обозначено $\langle a; b \rangle$.

Каждое рациональное число $r \in Q$ можно представить в виде отношения целого числа m к натуральному числу n : $r = \frac{m}{n}$, где $n \in N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$, $m \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\}$. Таким образом, каждое натуральное число, нуль и любое целое отрицательное число являются рациональными, поскольку $n = \frac{n}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$ и $-n = \frac{-n}{1}$. Рациональными числами

являются, очевидно, все обыкновенные и конечные десятичные дроби, а также, что уже менее очевидно, все бесконечные периодические десятичные дроби. Действительно, если считать правило сложения «столбиком» верным и для бесконечного числа десятичных дробей, т.е. считать верным, например, следующее равенство:

$$0,(1) = 0,1111\dots1\dots = 0,1 + 0,001 + \dots + 0,\overbrace{000\dots01}^{(n-1)\text{ нуль}} + \dots,$$

то, воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии $S = \frac{a_1}{1-q}$ со знаменателем $q = 0,1$ и первым членом $a_1 = 0,1$, получим $0,(1) = \frac{0,1}{1-0,1} = \frac{0,1}{0,9} = \frac{1}{9}$.

Аналогично можно показать, что для любой чистой периодической десятичной дроби $0,(a_1a_2\dots a_n)$, дробная часть которой содержит только повторяющуюся группу цифр (период) $\overline{a_1, a_2\dots a_n}$, справедлива следующая **формула записи чистой периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби**:

$$0,(a_1a_2\dots a_n) = \frac{\overline{a_1a_2\dots a_n}}{\overbrace{99\dots9}^{n \text{ девяток}}}.$$

Например, $0,(1) = \frac{1}{9}$; $0,(2) = \frac{2}{9}$; $0,(9) = \frac{9}{9} = 1$; $0,(17) = \frac{17}{99}$;

$$0,(1323) = \frac{1323}{9999} = \frac{147}{1111}.$$

В случае смешанной периодической дроби поступают следующим образом:

$$0,78(1323) = \frac{78,(1323)}{100} = \frac{78 + 0,(1323)}{100} = \frac{78 + \frac{1323}{9999}}{100}.$$

Выполнив сложение, получим $0,78(1323) = \frac{781245}{999900}$.

Число $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, которое нельзя представить в виде отношения целых чисел, называется иррациональным числом. Отсюда следует, что **любое иррациональное число записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби**. Но бесконечное число десятичных знаков записать невозможно! Поэтому для иррациональных чисел выбирают спе-

циальные обозначения в виде символов или букв. Например, иррациональными являются следующие числа $\sqrt{17}$; $\sqrt[4]{15}$; $5^{6,3}$; $\log_7 10$; $\sin \frac{\pi}{5}$, при записи которых использованы символы $\sqrt[n]{}$, \log_a ; \sin . Иррациональными являются, например, числа $\pi = 3,1415\dots$ и $e = 2,718281828\dots$.

Замечательным свойством действительных чисел, и в частности рациональных чисел, является тот факт, что рациональные числа расположены «между» действительными числами весьма плотно: *между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел.*

Пример 1. Среди всех обыкновенных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, лежащих между дробями а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{16}{21}$ и $\frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17}$ и $\frac{1}{3}$, найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

Решение. а) Пусть $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{2}{3}$. Тогда $3n < 6m < 4n$. Таким образом, на интервале $(3n; 4n)$ требуется найти наименьшее кратное 6. При $n=1; 2; 3; 4$ интервал $(3n; 4n)$ не содержит кратных 6. При $n=5$ интервал $(3n; 4n)$ имеет вид $(15; 20)$, на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно: $18=6 \cdot 3$, т.е. $m=3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь $\frac{3}{5}$.

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите б) $\frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$.

Пример 2. При каком значении параметра a на интервале $(5 - 2a; 2a + 7)$ лежит ровно 101 целое число?

Решение. При любом a серединой интервала $(5 - 2a; 2a + 7)$ является число $x_0 = \frac{(5 - 2a) + (2a + 7)}{2} = 6$. Следовательно, чтобы на интервале $(5 - 2a; 2a + 7)$ лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в пра-

вой полуокрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \leq 57 \Leftrightarrow 24,5 < a \leq 25.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те a , для которых $24,5 < a \leq 25$.

Для натуральных чисел справедлива **основная теорема арифметики**:

Каждое натуральное число n , большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k,$$

где $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ — простые числа. Напомним, что натуральное число $p > 1$ называется **простым числом**, если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и p . Натуральное число $p > 1$, не являющееся простым, называется **составным числом**. Множество простых чисел — бесконечное множество.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 - px + q = 0$, где p, q — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

Решение. Пусть x — простой корень данного уравнения. Тогда $x \neq 0$ и данное уравнение равносильно уравнению $x = p - \frac{q}{x}$. Отсюда следует, что число $\frac{q}{x}$ — целое. Значит, число x — делитель числа q . По условию x и q — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно, $x = q$. Подставляя $x = q$ в данное уравнение, находим $q = p - 1$. Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид $x^2 - 3x + 2 = 0$, а его корни 1 и 2.

На множестве $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$ целых чисел определена особая операция: **деление с остатком**. Справедлива теорема:

Для любых целых чисел a и b существуют единственные целое число c и целое неотрицательное число r такие, что $a = bc + r$, причем $0 \leq r < |b|$.

При $r > 0$ число c называется **неполным частным** от деления a на b ; при $r=0$ число c есть **частное** от деления a на b ; b — делитель a ; a — кратное b . Говорят также, что **число b делит число a** . Записывают это так: $b|a$ или, что то же самое, **число a делится на b** : $a:b$. Из определения делимости натуральных чисел следует, что если $b|a$, то $1 \leq b \leq a$. Поэтому число натуральных делителей натурального числа a конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

Пример 4. Определите последнюю цифру числа 3^{4567} .

Решение. Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3: $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; Период этой последовательности равен 4. Поскольку $4567=1141 \cdot 4 + 3$, то последней цифрой данной степени является число 7.

При решении задач на натуральные числа полезны следующие понятия.

1. **Наибольший общий делитель натуральных чисел a и b :**
НОД(a ; b).
2. **Наименьшее общее кратное натуральных чисел a и b :**
НОК[a ; b].

Смысл этих понятий ясен из их названий. Например, $\text{НОД}(12; 32)=4$. Действительно, общими делителями чисел 12 и 32 являются числа 1; 2; 4. Других общих делителей эти числа не имеют. Из всех общих делителей 1; 2; 4 чисел 12 и 32 наибольшим является число 4. Поэтому наибольшим общим делителем 12 и 32 является число 4. В общем случае, если требуется найти наибольший общий делитель $\text{НОД}(a; b)$ двух натуральных чисел, можно использовать их разложение на простые множители или воспользоваться **алгоритмом Евклида**. В нашем случае алгоритм Евклида выглядит следующей цепочкой равенств:

$$32=12 \cdot 2 + 8; \quad 12=8 + 4; \quad 8=4 \cdot 2.$$

Последний ненулевой остаток, равный в данном случае 4, и является $\text{НОД}(12; 32)$.

Второй пример. Найдем НОК[12; 32]. Для этого разложим числа 12 и 32 в произведение простых сомножителей: $12=2^2 \cdot 3$; $32=2^5$. Ясно, чтобы натуральное число k было общим кратным чисел 12 и 32, т.е. чтобы k делилось на 12 и на 32, необходимо и достаточно, чтобы $k=2^2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot m$, где $m \in N$. Отсюда при $m=1$ получим наименьшее общее кратное чисел 12 и 32. Поэтому $\text{НОК}[12; 32]=96$.

В общем случае для нахождения наименьшего общего кратного $\text{НОК}[a; b]$ двух натуральных чисел a и b , где $a \geq b$, обычно сначала с помощью алгоритма Евклида находят $\text{НОД}(a; b)$, а затем используют равенство $\text{НОК}[a; b] \text{НОД}(a; b)=ab$. В нашем случае

$$\text{НОК}[12; 32]=\frac{12 \cdot 32}{\text{НОД}(12; 32)}=\frac{12 \cdot 32}{4}=96.$$

Получили тот же самый результат.

Наибольший общий делитель $\text{НОД}(a; b)$ натуральных чисел a и b , где $a > b$, обладает некоторыми полезными свойствами. Отметим наиболее очевидные.

1. $\text{НОД}(a; b)=\text{НОД}(ka; kb)$, $k \in N$;
2. $\text{НОД}\left(\frac{a}{k}; \frac{b}{k}\right)=\frac{\text{НОД}(a; b)}{k}$;
3. $\text{НОД}(a; b)=\text{НОД}(a; a \pm b)$.

Пример 5. Целые числа m и n не имеют общих делителей, отличных от 1 и -1 . Является ли дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n}$ сократимой при некоторых натуральных m и n ?

Решение.

Пусть

$$d=\text{НОД}(5m-3n; 2m+5n) > 1.$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases} 5m-3n=dk, \\ 2m+5n=ds, \end{cases}$$

где числа k и s взаимно просты. Значит, дробь можно сократить только на один из делителей числа d , отличный от 1.

Запишем $m=\frac{5k+3s}{31}d$, $n=\frac{5s-2k}{31}d$. Отсюда $d=31q$.

Можно рассуждать иначе. Запишем дробь в виде

$$\frac{5m-3n}{2m+5n} = 2 + \frac{1}{\frac{2m+5n}{m-13n}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{31n}{m-13n}} \quad (\text{при } m-13n \neq 0).$$

Данная дробь сократима тогда и только тогда, когда сократима дробь $\frac{31n}{m-13n}$. Но числа m и n не имеют общих делителей, поэтому дробь может быть сокращена на число 31 или на кратное ему. Например, при $m=23$, $n=-3$ получаем дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n} = \frac{5 \cdot 23 + 9}{2 \cdot 23 - 15} = \frac{124}{31}$, которая сократима на 31.

При решении различных задач повышенной сложности нередко типичной проблемой является **сравнение чисел**. Напомним, что сравнение рациональных чисел осуществляется с помощью определения:

$$\frac{a}{b} < \frac{m}{n} \xrightarrow{\text{онп.}} an < bm.$$

В других случаях помогает свойство транзитивности неравенств:

$$\frac{a}{b} > \alpha, \alpha > \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{m}{n}.$$

При сравнении дробей полезны следующие теоремы.

Теорема.

Если числитель и знаменатель дроби положительны, то при их увеличении на одно и то же число неправильная дробь уменьшается, а правильная увеличивается, другими словами:

если $a > b > 0$ и $c > 0$, то $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$ и $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$.

Пример 6. Сравните числа $\frac{1222333}{1333222}$ и $\frac{2222333}{2333222}$.

Решение. Использовать для сравнения приведенное выше определение не хочется. Придется перемножить семизначные числа! Используя теорему, заметив, что поскольку дробь $\frac{1222333}{1333222}$ правильная и $\frac{2222333}{2333222} = \frac{1222333 + 1000000}{1333222 + 1000000}$, то $\frac{1222333}{1333222} < \frac{2222333}{2333222}$.

При сравнении чисел, имеющих вид степени (или выражения с радикалами), используют теоремы, выражающие свойства степеней и радикалов.

Теорема.

Если $a > 0$, $b > 0$, то $a > b \Leftrightarrow a^\beta > b^\beta$, где β — положительное число.

Теорема.

Если $a > 1$ и $\alpha > \beta$, то $a^\alpha > a^\beta$; если $0 < a < 1$ и $\alpha > \beta$, то $a^\alpha < a^\beta$.

Теорема.

Если $a \geq b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a^m} \geq \sqrt[n]{b^m}$, где n, m — натуральные числа.

Пример 7. Сравните числа 2^{300} и 3^{200} .

Решение. Поскольку $2^{300} = (2^3)^{100}$, а $3^{200} = (3^2)^{100}$, и $2^3 < 3^2$, то $2^{300} < 3^{200}$.

Пример 8. Сравните числа $2^{\sqrt{3}}$ и $3^{\sqrt{2}}$.

Решение. Здесь более сложный случай. По свойству степеней с основанием, большим 1, имеем $3^{\sqrt{2}} > 3^{1,4}$, а $2^{\sqrt{3}} < 2^2$. Сравним теперь числа $3^{1,4} = (3^{0,7})^2$ и 2^2 . Для этого достаточно сравнить $3^{0,7}$ и 2 или $(3^{0,7})^{10}$ и 2^{10} . Но $(3^{0,7})^{10} = 3^7 = 2187$, а $2^{10} = 1024$. Теперь получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} 1024 < 2187 &\Leftrightarrow 2^{10} < 3^7 \Leftrightarrow 2 < 3^{0,7} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^2 < 3^{1,4} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{3}} < 2^2 < 3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Пример 9. Сравните числа $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[6]{6}$.

Решение. Воспользуемся следующим свойством радикалов: если $a > 0$, то $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$, где n, k — натуральные числа.

Получим $\sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6}$ и $\sqrt[6]{6} = \sqrt[30]{6^5}$. Теперь достаточно сравнить степени 5^6 и 6^5 . Оценим их отношение:

$$\begin{aligned} \frac{5^6}{6^5} &= \frac{5}{\left(\frac{6}{5}\right)^5} = \frac{5}{(1+0,2)^5} = \frac{5}{(1+0,2)^2(1+0,2)^3} = \\ &= \frac{5}{(1+0,4+0,04)(1+0,6+0,12+0,008)} > \frac{5}{2 \cdot 2} > 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{5^6}{6^5} > 1 \Leftrightarrow 5^6 > 6^5$ и, значит, $\sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6}$.

Замечания.

1) В данном случае степени 5^6 и 6^5 невелики, а именно $5^6 = 15625$, $6^5 = 7776$, и их нетрудно вычислить «вручную», т.е. без калькулятора. Можно и без вычислений оценить степени:

$$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \cdot 125 > 10000,$$

$$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36 \cdot 36 \cdot 6 < 40 \cdot 40 \cdot 6 = 9600.$$

Поэтому $5^6 > 10000 > 9600 > 6^5$.

2) Если же степени действительно не поддаются вычислению (даже на калькуляторе), например, n^{n+1} и $(n+1)^n$, то можно использовать неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, верное при любом натуральном n , и поступить так:

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > \frac{n}{3} \geq 1 \text{ при всех натуральных } n \geq 3.$$

Упражнение. Докажите самостоятельно неравенство

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

При сравнении чисел, которые являются значениями тригонометрических или логарифмических функций, обычно используются свойства соответствующих функций.

Перечислим некоторые свойства тригонометрических функций, связанные с неравенствами.

Если $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$, то $\sin a \leq \sin b$ и $\operatorname{tga} \leq \operatorname{tgb}$ (свойство монотонности).

Если $0 < a \leq b < \pi$, то $\cos a \geq \cos b$ и $\operatorname{ctga} \geq \operatorname{ctg} b$ (свойство монотонности).

Если $0 < a \leq b < \pi$, то $\frac{\sin a + \sin b}{2} \leq \sin \frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-\frac{\pi}{2} < a \leq b < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\cos a + \cos b}{2} \leq \cos \frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-1 \leq a \leq b \leq 1$, то $\arcsin a \leq \arcsin b$, но $\arccos a \geq \arccos b$ (свойство монотонности).