А. Г. Щепетов, Ю. Н. Дьяченко

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Под редакцией **А. Г. Щепетова**

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2017

УДК 621.3(075.8)
ББК 32.811.3я73
Щ56

***Авторы*:**

Щепетов Александр Григорьевич — профессор, кандидат технических наук, профессор кафедры приборов и информационно-измерительных систем Института комплексной безопасности и специального приборостроения Московского технологического университета;

Дьяченко Юрий Николаевич — кандидат технических наук, доцент кафедры измерительных информационных технологий Института компьютерных наук и технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

***Рецензенты*:**

Савельев В. В. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой приборов и биотехнических систем Тульского государственного университета;

Пронин С. П. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий Алтайского государственного технического университета имени И. И. Ползунова.

Щепетов, А. Г.

Щ56 Преобразование измерительных сигналов : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. Г. Щепетов, Ю. Н. Дьяченко ; под ред. А. Г. Щепетова. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 270 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-534-01177-7

В учебнике рассмотрены основы теории, способы математического описания и закономерности преобразования измерительных сигналов. Содержание и изложение подчинены приобретению практических знаний, умений и навыков, необходимых для понимания процессов преобразования измерительных сигналов. Даны примеры решения типовых задач в этой области и задачи для самостоятельного решения.

В отличие от программ подготовки выпускников радиотехнических специальностей вузов, главное внимание уделяется преобразованиям измерительных сигналов и условиям, способствующим сохранению измерительной информации, закодированной в параметрах таких сигналов.

Содержание учебника соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим направлениям и специальностям.

УДК 621.3(075.8)
ББК 32.811.3я73

ISBN 978-5-534-01177-7

Оглавление

Список принятых сокращений

АКФ — автокорреляционная функция
АМ — амплитудно-моделированный
АПК — аппроксимирующая кривая
АПФ — аппроксимирующая функция
АЦП — аналого-цифровой преобразователь
АЧХ — амплитудно-частотная характеристика
БИХ — бесконечная импульсная характеристика
ВКФ — взаимная корреляционная функция
ВП — вторичный прибор
ВУ — вычислительное устройство
ДПП — длительность переходного процесса
ДПФ — дискретная передаточная функция
ДЧХ — дискретная частотная характеристика
ИВК — измерительно-вычислительный комплекс
ИИС — информационно-измерительная система
ИК — измерительный канал
ИП — измерительный прибор
ИПр — измерительный преобразователь
ИПФ — интерполирующая функция
ИС — измерительная система
ИУ — измерительное устройство
ИУс — измерительная установка
КЗ — корректирующее звено
КИХ — конечная импульсная характеристика
КЧФ — комплексная частотная функция
ЛСДС — линейная стационарная дискретная система
МК — микроконтроллер
МППА — максимальная приведенная погрешность аппроксимации
МППН — максимальная приведенная погрешность от нелинейности
ОП — оператор преобразования
ОУ — отсчетное устройство
ПИ — потребитель информации
ПНК — прямая наименьших квадратов
ПНМ — прямая наименьших модулей
ПРВ — плотность распределения вероятности
ППЧ — полоса пропускания частот
ПЭВМ — персональная электронно-вычислительная машина
РСХИУ — расчетная статическая характеристика измерительного устройства
САК — система автоматического контроля
САР — система автоматического регулирования

САУ — система автоматического управления
СКО — среднеквадратическое отклонение
СППА — среднеквадратическая приведенная погрешность аппроксимации
СППН — среднеквадратическая приведенная погрешность от нелинейности
УПОС — устройства приема и обработки сигналов
УВХ — устройство выборки/хранения
ФВЧ — фильтр высокой частоты
ФМ — фазо-модулированный
ФНЧ — фильтр низкой частоты
ФЧХ — фазо-частотная характеристика
ЦАП — цифро-аналоговый преобразователь
ЦИУ — цифровое измерительное устройство
ЦКЗ — цифровое корректирующее звено
ЦОУ — цифровое отсчетное устройство
ЦФ — цифровой фильтр
ЧМ — частотно-модулированный
ЧЭ — чувствительный элемент
ЭКР — эффективное количество разрядов

Предисловие

В учебнике рассматриваются основы теории, способы описания, основные характеристики и закономерности преобразования измерительных сигналов, которые необходимо знать будущим приборостроителям.

В настоящее время приборостроение является важной отраслью промышленности, от успешного развития которой зависит способность страны к инновациям, внедрению новых приборов, установок, систем и технологий, необходимых для повышения производительности труда, создания комфортных и безопасных условий жизни людей, освоения окружающей среды, обеспечения экологической безопасности и пр.

Технической основой большинства изделий приборостроения являются устройства, с помощью которых одна физическая величина, принимаемая за входной сигнал, преобразуется в другую величину (выходной сигнал), удобную для последующей обработки. К таким устройствам относятся измерительные, контролирующие, испытательные, информационные, наблюдательные, управляющие, регистрирующие и другие преобразователи, датчики, приборы, установки и системы. С помощью измерительных устройств осуществляют измерение параметров объектов, посредством контролирующих устройств — оценку их принадлежности к заданному классу объектов, благодаря испытательным устройствам — испытания изделий и продукции, с помощью информационных устройств — информирование о текущем состоянии объектов, а управляющих устройств — управление объектами, посредством регистрирующих устройств — фиксацию текущего состояния объектов, документирование и хранение результатов измерений и т.д. Такие устройства, как правило, имеют нормированные характеристики, т.е. выполняют необходимые преобразования сигналов с необходимой точностью.

Успешное проектирование, создание и эксплуатация этих устройств невозможны без знания закономерностей преобразования сигналов, изучению которых посвящена дисциплина «Преобразование измерительных сигналов».

Отбор учебного материала, характер его изложения и уровень сложности подчинены задачам подготовки бакалавров по направлению подготовки 12.03.01 «Приборостроение». В настоящее время в вузах России осуществляется выпуск по 26 специальностям (профилям) этого направления подготовки: 1) «Механоэлектронные приборы и системы»; 2) «Датчики автоматических систем»; 3) «Методы и средства измерения механических величин»; 4) «Приборы и системы регистрации и воспроизведения информации»; 5) «Контрольно-измерительные приборы и системы»; 6) «Механотронные прецизионные устройства и приборы»; 7) «Кинофотовидеоаппаратура»; 8) «Приборы и диагностические системы экологической безопасности»; 9) «Бортовые приборы управления»; 10) «Менеджмент в приборостроении»; 11) «Компьютерная томография»; 12) «Сенсоры механики и биомеханики»;

13) «Организация и компьютеризация измерений»; 14) «Приборы и системы охраны правопорядка»; 15) «Приборы и оборудование волоконно-оптической техники»; 16) «Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации»; 17) «Медицинские электромеханические приборы и устройства»; 18) «Приборы и методы исследования диагностики материалов»; 19) «Качество и сертификация приборов»; 20) «Приборы и системы таможенного, экспортного и импортного контроля»; 21) «Биомедицинские приборы и системы»; 22) «Электромеханические приборы и устройства телекоммуникационных систем»; 23) «Измерительно-вычислительные комплексы»; 24) «Лазерные измерительные приборы и системы»; 25) «Приборы и системы контроля качества в строительстве»; 26) «Приборы и системы обеспечения безопасности».

Учебник можно использовать также по другим направлениям подготовки, специальностям и специализациям, связанным с преобразованием сигналов.

Учебник содержит шесть глав и два приложения.

В гл. 1 рассматриваются различные виды сигналов, способы их математического описания и свойства, позволяющие использовать сигнал в качестве носителя измерительной информации. Рассматриваются аналоговые и дискретные, детерминированные и случайные, полезные и вредные, постоянные и переменные, гармонические и полигармонические, узкополосные и широкополосные, импульсные и другие сигналы. Основное внимание уделяется отличительным признакам разных сигналов и особенностям их использования для передачи измерительной информации.

В гл. 2 изучаются основные характеристики измерительного сигнала: энергетические, спектральные, корреляционные, статистические (вероятностные) и информационные. Они являются важными компонентами математической модели сигнала, позволяющими в количественной форме оценивать его способность содержать и переносить информацию, участвовать в преобразованиях, требующих затрат энергии, взаимодействовать с другими сигналами и пр.

В гл. 3 рассматриваются виды современных измерительных устройств, условия их работы и основные принципы построения, влияющие на точность преобразования сигналов. Даются сведения о назначении промежуточных преобразователей и осуществляемых с их помощью преобразованиях: масштабировании, коррекции, фильтрации, модуляции, экстраполяции, дискретизации, квантовании, кодировании, цифровой обработке, регистрации и пр. Рассматриваются статические и динамические характеристики приборов. Обращается внимание на необходимость согласования этих характеристик прибора с характеристиками измерительного сигнала и условиями измерений.

Глава 4 посвящена вопросам аппроксимации и интерполяции сигналов, определения оптимальных значений параметров аппроксимирующих функций, обеспечивающих наилучшее минимаксное и среднеквадратическое приближения. Дается представление о сплайн-интерполяции сигналов и функций.

В гл. 5 рассматриваются измерительные преобразования аналоговых сигналов. Дается представление об операторе измерительного преобразования, на основе которого строится классификация таких преобразований. Подробно изучается преобразование детерминированных и случайных сигналов. Демонстрируются отличительные особенности линейного и нелинейного, инерционного и безынерционного, стационарного и нестационарного измерительных преобразований. Рассмотрены разновидности промежуточных измерительных преобразований: усиление, коррекция, модуляция, фильтрация, детектирование, функциональное преобразование и пр. Приводятся сведения о способах моделирования детерминированных и случайных сигналов. Дается оценка погрешности измерительного преобразования и показываются пути ее уменьшения. Среди них предпочтение отдается современным структурным и алгоритмическим методам повышения точности, обеспечивающим инвариантность средства измерений к изменениям условий эксплуатации.

Тема гл. 6 — преобразования дискретных сигналов. Содержание этой главы определяется задачами совершенствования современных приборов и систем за счет сочетания достоинств аналоговых измерительных устройств с точностью и помехозащищенностью цифровых средств измерений. Изучены особенности дискретизации и квантования измерительных сигналов и их последующее кодирование. Даны способы прогнозирования, восстановления и экстраполяции аналоговых непрерывных сигналов по их дискретным отсчетам, показаны их преимущества и недостатки, а также специфика практического восстановления сигналов с использованием цифро-аналоговых преобразователей с конечной разрядной сеткой. Рассматривается применение выборки с запасом по частоте и фильтров для борьбы с эффектом наложения спектров, возникающего в процессе аналого-цифрового преобразования сигнала, а также цифровая фильтрация помех в измерительных каналах, построенных на основе современных аналого-цифровых преобразователей. Показана возможность обеспечения высокой точности такого преобразования за счет использования автоматической калибровки и линеаризации статической характеристики прибора. Даются сравнительные характеристики отечественных и зарубежных средств измерений.

В последние годы к выпускникам технических вузов предъявляются повышенные требования к компетентности, т.е. к их способности и стремлению самостоятельно применять на практике полученные знания. Поэтому авторы обращали особое внимание на возможность эффективного использования учебного материала для решения типовых практических задач преобразования измерительных сигналов.

В приложениях к учебнику содержатся справочный материал, а также примеры расчетов, упражнения и задания, помогающие самостоятельной работе студентов. В приложении 1 даны сведения о преобразованиях Фурье и Лапласа, в том числе дискретном преобразовании Лапласа (Z-преобразовании). Рассмотрены свойства этих преобразований и особенности их применения. В приложении 2 даны примеры решения типовых задач преобразования сигналов и задачи для самостоятельного решения. Их можно с успехом использовать для формирования учебных заданий, проведения практических занятий и подготовки к участию в конкурсах.

В результате успешного освоения дисциплины студент должен:

знать

• цели и задачи преобразования измерительных сигналов;

• способы описания, характеристики и основные методы анализа измерительных сигналов;

• характеристики устройств, влияющие на преобразование измерительных сигналов;

• особенности и отличительные признаки основных видов преобразования сигналов;

• способы моделирования измерительных сигналов;

уметь

• применять теоретические знания и справочные данные для выбора вида, формы и параметров измерительных сигналов;

• самостоятельно решать типовые задачи преобразования измерительных сигналов и правильно интерпретировать полученные результаты;

• грамотно формулировать требования к устройствам, осуществляющим преобразование измерительных сигналов;

владеть

• технологиями компьютерного решения задач преобразования измерительных сигналов;

• навыками самостоятельного поиска информации, необходимой для анализа конкретных сигналов и решения основных задач преобразования измерительных сигналов.

Глава 1
ОПИСАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

1.1. Виды сигналов

В общем случае сигналом называют определенным образом организованное отображение информации. В измерительной технике сигналом называется физический процесс, отображающий состояние объекта измерений и служащий для передачи измерительной информации, закодированной в параметрах сигнала, от объекта к потребителю информации.

По назначению различают *измерительные, управляющие, информирующие, образцовые, тестовые, корректирующие, вспомогательные* и другие сигналы (рис. 1.1).

СИГНАЛЫ
а) измерительные, управляющие, информирующие, тестовые, корректирующие, образцовые, вспомогательные
б) полезные, вредные
в) механические, электрические, магнитные, тепловые, оптические, акустические, ионизационные и др.
г) первичные, промежуточные, выходные
д) детерминированные, случайные, псевдослучайные
е) непрерывные, дискретные
ж) постоянные (стационарные), переменные (нестационарные)
з) периодические, непериодические
и) гармонические, полигармонические, импульсные, финитные
к) одномерные, многомерные
л) узкополосные, широкополосные, с финитным спектром
м) независимые, зависимые (коррелированные), модулирующие, модулированные

Рис. 1.1. **Классификация сигналов:**

а — по назначению; *б* — по влиянию на переносимую информацию; *в* — по физической природе; *г* — по месту в цепи измерительных преобразований; *д* — по признаку повторяемости при многократных наблюдениях; *е, ж, з, и* — по характеру зависимости от времени; *к* — по числу независимых координат; *л* — по форме частотного спектра; *м* — по степени зависимости друг от друга и от других сигналов

Измерительные сигналы применяют для передачи измерительной информации. Тестовые сигналы используют для оценки характеристик и испытаний приборов. С помощью управляющих сигналов осуществляют управление объектами и процессами, с помощью корректирующих сигналов — исправление (коррекцию) результатов преобразования сигналов. Образцовые и вспомогательные сигналы служат для оценки погрешности и повышения точности измерений.

Все они относятся к *полезным* сигналам. Их антиподами являются *вредные* сигналы (шумы и помехи). Они искажают полезные сигналы, поэтому нуждаются в устранении. В зависимости от места своего возникновения вредные сигналы делят на *внешние* наводки (обусловленные внешними источниками) и *внутренние* шумы (вызванные нежелательными процессами, происходящими при работе ИУ), по особенностям их проявления — на *флуктуационные*, *сосредоточенные* и *импульсные* шумы и помехи.

Флуктуационные шумы и помехи проявляются в виде хаотических, беспорядочных изменений сигнала. В зависимости от физической природы такой шум может быть *тепловым* (вызванным тепловым движением молекул), *дробовым* (обусловленным движением электронов) или *фликкер-шумом* (обусловленным рекомбинацией зарядов). Сосредоточенные помехи отличаются сравнительно узкой полосой частот. Их источниками обычно являются наводки от промышленной силовой сети частотой 50 Гц. Импульсные помехи проявляются в наложении на измерительный сигнал регулярной или случайной последовательности импульсов, вызванной работой различных устройств (например, коммутирующих). Для описания шумов и помех используют математический аппарат теории случайных процессов.

В зависимости от физической природы носителя информации (сигнала) различают *механические*, *электрические*, *магнитные*, *тепловые*, *оптические*, *акустические* и другие сигналы.

Носителями механических сигналов являются материальные объекты (тела, предметы, среды и пр.), испытывающие воздействие измеряемой физической величины.

Носителями электрических и магнитных сигналов являются электромагнитные поля, токи, заряды и напряжения. Такие сигналы чаще других (неэлектрических) используются для передачи, обработки и хранения измерительной информации.

Тепловые сигналы отражают изменение тепловых величин: температуры, количества теплоты, теплопроводности, теплоемкости и пр. Источником таких сигналов является хаотическое тепловое движение молекул и атомов контролируемой среды, зависящее от уровня ее внутренней энергии. Температуру нагретого тела можно измерять на расстоянии. В этом случае носителем измерительной информации является тепловое (радиационное) излучение тела.

Носителем оптических (световых) сигналов является электромагнитное излучение оптического диапазона частот. Информация о нем может содержаться в параметрах электромагнитной волны, положении плоскости поляризации, пространственной и (или) временной структуре поля излучения и пр.

Акустические сигналы представляют собой упругие волны (в частности, ультразвуковые колебания), распространяющиеся в окружающей среде.

Такие сигналы часто встречаются в природе и используются для навигации (летучие мыши), локации (дельфины), идентификации (насекомые), предупреждения (хищники) и пр.

В зависимости от места в цепи измерительных преобразований различают *первичный* (*входной*), *промежуточные* и *выходной* сигналы. Источником первичного сигнала является физический процесс, непосредственно отражающий измеряемую величину: давление среды, движение контролируемого объекта, теплообмен, межмолекулярное взаимодействие, химические реакции соединений, деление ядер, гравитационное взаимодействие и пр.

Промежуточными сигналами обычно являются электрические напряжения и токи во внутренних точках измерительного канала, а выходным сигналом — показание прибора, управляющее воздействие или информирующий (предупреждающий, разрешающий, запрещающий и т.д.) сигнал.

Параметр сигнала, зависящий от измеряемой физической величины и используемый для передачи измерительной информации, называется *информативным параметром* этого сигнала. Таким параметром могут быть мгновенное значение сигнала x (рис. 1.2, *а*), его амплитудное или пиковое значение A_x (рис. 1.2, *б*), частота f_x, период T_x (рис. 1.2, *в*), фаза и пр. Соответствующие сигналы называются *амплитудно-модулированным*, *частотно-модулированным*, *фазо-модулированным* и т.д.

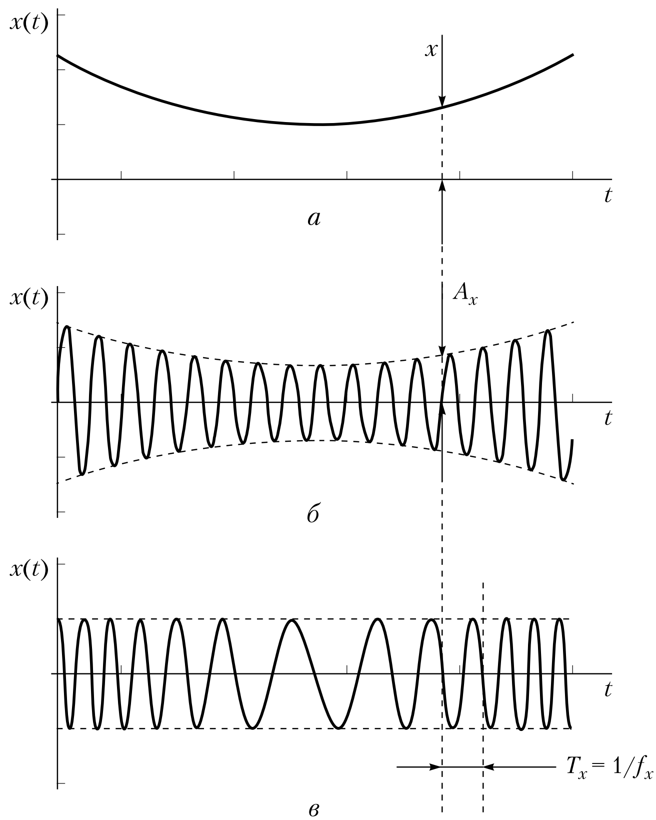

Рис. 1.2. **Измерительные сигналы:**

а, *б* — амплитудно-модулированные сигналы; *в* — частотно-модулированный сигнал

Сигнал может иметь несколько параметров, зависящих от измеряемой величины. Например, первичный измерительный сигнал импульсного тахометра представляет собой последовательность импульсов напряжения $e(t)$, которые наводятся в катушке *3* при прохождении вблизи нее четырех постоянных магнитов *2*, закрепленных на валу двигателя *1* (рис. 1.3, *а*).

С помощью резистора R и диода VD отсекаются импульсы отрицательной полярности. За один оборот вала в катушке наводится четыре импульса (рис. 1.3, *б*). Чем больше угловая скорость вала, тем больше число импульсов N_x (за заданный промежуток времени), их пиковое значение A_x и частота f_x, т.е. информативным параметром сигнала e могут быть число импульсов, амплитуда, частота или период этого сигнала, а также его другие параметры, например среднее или действующее значения.

С помощью усилителя-преобразователя *4* сигнал e преобразуется в последовательность прямоугольных импульсов U той же частоты. Затем с помощью устройства *5* определяется число импульсов N_x, частота f_x или период T_x сигнала U. С помощью микроконтроллера *6* вычисляется результат измерений $\bar{x}$, который выводится на отсчетное устройство *7*.

При определении характеристик прибора (статических, динамических и др.) величины x, e, U, N_x, $\bar{x}$ на рис. 1.3, *а* следует рассматривать не как сигналы, описывающие соответствующие физические процессы, а как *информативные параметры* этих сигналов. Однако, зная мгновенные значения сигнала (например, напряжения $e(t)$), можно определить соответствующее значение его информативного параметра. Зависимость информативного параметра сигнала от измеряемой физической величины называется *сигнальной функцией* [8].

Выбор информативного параметра сигнала может заметно влиять на схему, конструкцию и характеристики создаваемого прибора[1]. Например частотно-модулированный сигнал, показанный на рис. 1.2, *в*, обладает значительно большей помехозащищенностью, чем амплитудно-модулированные сигналы, показанные на рис. 1.2, *а, б*, так как информативный параметр

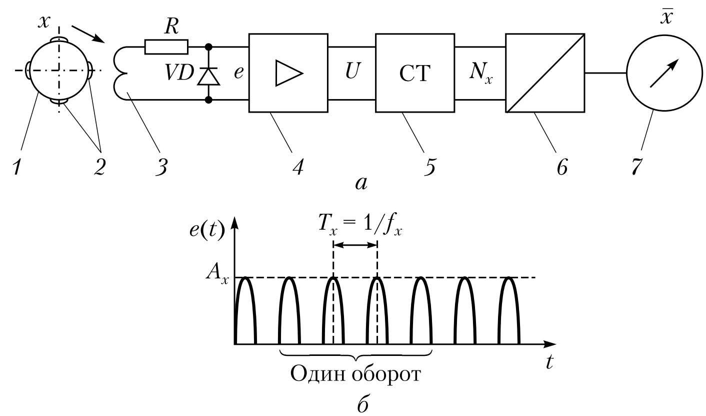

Рис. 1.3. **Импульсный тахометр:**

а — схема прибора; *б* — первичный измерительный сигнал

---

[1] *Щепетов А. Г., Хухтиков Н. А.* О влиянии формы и параметров сигнала на точность нелинейного измерительного преобразования данного сигнала // Приборы. 2012. № 6 (144). С. 38—40.

этого сигнала (частота) в значительно меньшей степени подвержен воздействию аддитивных помех, искажающих величину (амплитуду) сигнала. Однако получение и обработка такого сигнала могут потребовать более сложной схемы прибора. Заметим также, что частота сигнала $e(t)$ пропорциональна угловой скорости вращения вала, а период — обратно пропорционален угловой скорости. Поэтому алгоритм вычисления результата измерений и точность измерений зависят от выбора информативного параметра измерительного сигнала.

В зависимости от повторяемости при многократных наблюдениях различают *детерминированные* и *случайные* сигналы. Детерминированным называется сигнал, значение которого в любой момент времени точно известно. Такой сигнал можно описать заранее известной (детерминированной) функцией времени, например функцией (1.1). На практике детерминированные сигналы можно воспроизвести лишь с определенной точностью. Поэтому реальные сигналы всегда являются случайными. При их повторных наблюдениях имеет место случайный разброс значений сигнала. Чем меньше степень такого разброса, тем больше случайный сигнал приближается к сигналу детерминированному.

По признаку зависимости характеристик сигнала от времени детерминированные сигналы делят на *постоянные* (рис. 1.4, *а*) и *переменные* (рис. 1.4, *б*), случайные сигналы — на *стационарные* (рис. 1.4, *в*) и *нестационарные* (рис. 1.4, *г*). Характеристики стационарных сигналов не зависят от времени. Такие сигналы типичны для установившегося состояния объекта измерений, нестационарные сигналы — для переходных режимов.

Вычисляя для каждого момента времени математическое ожидание сигнала $m_x(t)$ (по формуле (2.115)), можно получить кривую, вблизи которой группируются и вокруг которой колеблются все реализации случайного сигнала (на рис. 1.4, *в*, *г* показана пунктиром). Эта кривая описывает *регулярную* (систематическую) составляющую сигнала. Отклонения различных реализаций сигнала от этой кривой описывает центрированная (имеющая нулевое математическое ожидание) случайная функция времени $\overset{0}{X}(t)$. Она отражает наличие *флуктуационной* составляющей сигнала.

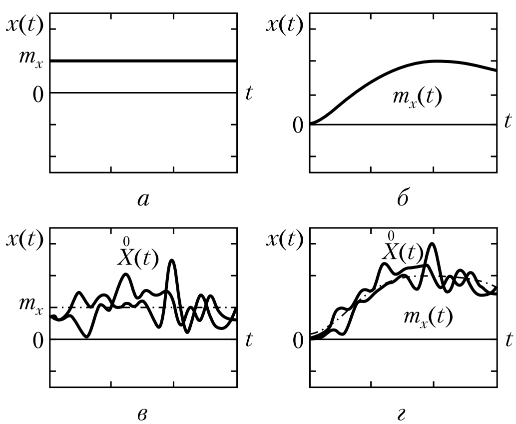

Рис. 1.4. **Сигналы:**

а, *б* — детерминированные: постоянные (*а*) и переменные (*б*);
в, *г* — случайные: стационарные (*в*) и нестационарные (*г*)

Разные физические процессы и соответствующие им сигналы могут быть по-разному связаны между собой. Эта связь выражается в том, что один процесс может заметно влиять на протекание другого процесса или, наоборот, не оказывать на него никакого влияния. В соответствии с этим различают *зависимые* и *независимые* процессы и сигналы. Для количественной оценки такой зависимости используют *взаимную корреляционную функцию сигналов*. Также представляет интерес зависимость между значениями случайного сигнала в разные моменты времени t_1 и t_2. Такая связь характеризует закономерность протекания соответствующего физического процесса. Для ее количественной оценки используется *автокорреляционная функция* сигнала. Ее значение при $t = t_1 = t_2$ характеризует дисперсию (степень разброса значений) сигнала в данный момент времени (см. (2.117)).

Если математическое ожидание и дисперсия сигнала являются постоянными, а его автокорреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$, то такой сигнал называется *стационарным в широком смысле*. Если все (включая названные) статистические характеристики сигнала не зависят от времени, то соответствующий сигнал называется *стационарным в узком смысле*.

Распределение значений случайного сигнала в каждом его сечении обычно считается гауссовским (нормальным). Соответствующие сигналы называются *нормальными*. Для таких сигналов понятие стационарности в широком и узком смыслах совпадают.

Среди стационарных в широком смысле сигналов выделяют так называемые *эргодические* сигналы. Любая реализация эргодического сигнала является «полномочным представителем» всего ансамбля его возможных реализаций, так как содержит в себе сведения обо всех характеристиках такого сигнала. Представление о форме реализаций эргодического сигнала дает рис. 1.4, *в*. Для того чтобы быть уверенным в этом, нужно иметь реализацию достаточной длины. Она должна значительно превышать *интервал корреляции* сигнала.

Если один или несколько параметров детерминированного сигнала (например, амплитуда A сигнала $x(t) = A\sin(3t)$) является случайной величиной, то такой сигнал называется *квазидетерминированным* или *псевдослучайным*.

Различают аналоговые, дискретные и цифровые сигналы. *Аналоговые* сигналы изменяются аналогично тому физическому процессу, который они описывают. Такие сигналы, как правило, являются непрерывными по значению (уровню) и времени. *Дискретные* сигналы получают путем дискретизации аналоговых сигналов по времени и (или) по уровню. Сигналы, дискретизированные по времени, называют *решетчатыми*, сигналы, дискретизированные по уровню, — *квантованными*, сигналы, дискретизированные по времени и уровню, а также закодированные, — *цифровыми* (*кодовыми*) сигналами.

Различие между такими сигналами иллюстрирует рис. 1.5. На этом рисунке аналоговый сигнал $x_а(t)$ представлен графиком непрерывной функции времени

$$x_а(t) = 3\sin(2t + 3) + 0{,}3, \tag{1.1}$$

заданной на интервале $2 \leqslant t \leqslant 4$ с (рис. 1.5, *а*).

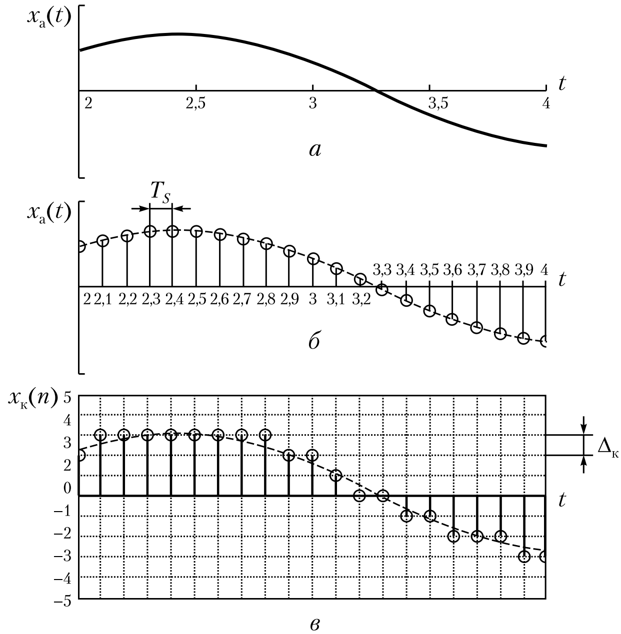

Рис. 1.5. **Сигналы:**

а — аналоговый; *б* — дискретный; *в* — цифровой

Дискретный сигнал $x_д(t)$ представлен последовательностью отсчетов сигнала $x_а(t)$, а его значения — последовательностью чисел (*дискретной последовательностью* $x(n)$), каждое из которых совпадает со значением функции $x_а(t)$ в дискретные моменты времени $t_k = 2 + nT_S$, отстоящие друг от друга на интервал времени T_S, называемый *шагом дискретизации* (на рис. 1.5, *б* $T_S = 0{,}1$ с),

$$x_а(2) = 2{,}271..., x_а(2{,}1) = 2{,}681..., ..., x_а(3{,}9) = -2{,}643..., x_а(4) = 2{,}700... . \quad (1.2)$$

Такой сигнал можно описать формулой

$$x_д(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_а(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S), \quad (1.3)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция (см. рис. 1.13). График функции (1.3) напоминает решетку (см. рис. 1.5, *б*). Поэтому ее называют *решетчатой функцией*. На практике импульсы дискретного сигнала $x_д(t)$ имеют конечную длительность $\tau_и < T_S$ (рис. 1.6), т.е. формула (1.3) является приближенной. Чем меньше T_S и $\tau_и$, тем меньше дискретный сигнал отличается от аналогового сигнала.

Кодовый сигнал $x_к(n)$ также представлен последовательностью чисел (*цифровой последовательностью*)

$$2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 0, 0, -1, -1, -2, -2, -2, -3, -3, \quad (1.4)$$

каждое из которых зависит от номера отсчета n и является округленным (в данном случае до целого) значением соответствующего числа из предыдущей последовательности чисел (1.2). Точность округления зависит от ве-

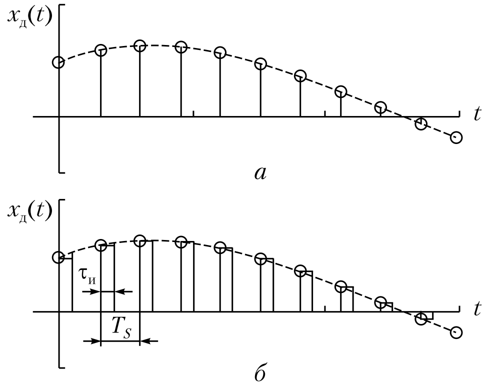

Рис. 1.6. **Дискретные сигналы:**

а — идеальный; *б* — реальный

личины шага квантования $\Delta_к$ (на рис. 1.5, *в* $\Delta_к = 1$) — чем он меньше, тем меньше цифровой сигнал отличается от дискретного сигнала.

Если дискретизации подвергается случайный сигнал, то соответствующая последовательность его значений называется *случайной последовательностью*.

Для получения дискретного сигнала используют импульсный элемент (ключ), работающий с частотой дискретизации $f_д = 1/T_S$, и формирователь импульсов (фильтр) с передаточной функцией $W_ф(p)$. На рис. 1.7, *б* показана структурная схема (модель) дискретизатора, на рис. 1.7, *а*, *в* — формы входного (аналогового) и выходного (дискретного) сигналов.

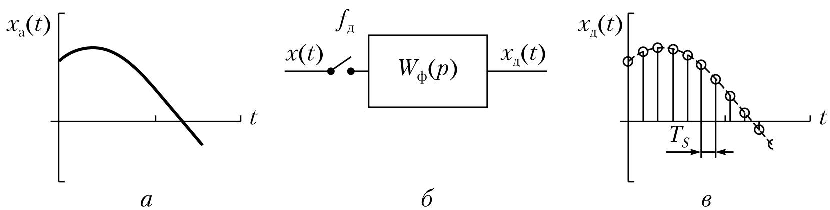

Рис. 1.7. **Дискретизация сигнала:**

а — аналоговый сигнал; *б* — структурная схема ; *в* — дискретный сигнал

Импульсы, образующие дискретный сигнал, имеют определенную форму, зависящую от передаточной функции фильтра (см. рис. 1.6). Если они должны быть прямоугольными, то $W_ф(p) = (1 - e^{-p\tau_и})/p$.

Для получения квантованного сигнала $x_к(t)$ аналоговый сигнал $x_а(t)$ преобразуется звеном с нелинейной ступенчатой характеристикой $F(x)$. На рис. 1.8, *б* показана характеристика такого звена. Значения выходного (квантованного) сигнала отличаются друг от друга не менее величины кванта $\Delta_к$. Осуществляя дискретизацию по времени и кодирование такого сигнала, получают *кодовый* (цифровой) сигнал.

В зависимости от особенностей спектральных характеристик различают *узкополосные* и *широкополосные* сигналы. В первом случае частотный спектр сигнала $G_x(\omega)$ имеет один ярко выраженный резонансный пик (рис. 1.9, *а*).

Предельным для этого случая является спектр гармонического (монохроматического) сигнала, в котором присутствует лишь одна гармоника ча-

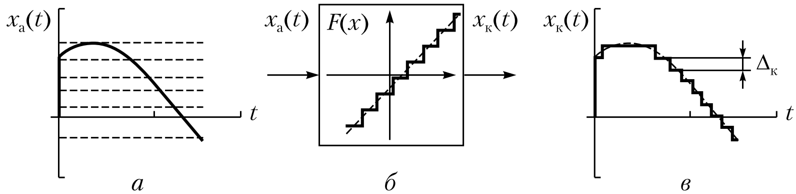

Рис. 1.8. **Квантование сигнала:**

а — аналоговый сигнал; *б* — структурная схема; *в* — квантованный сигнал

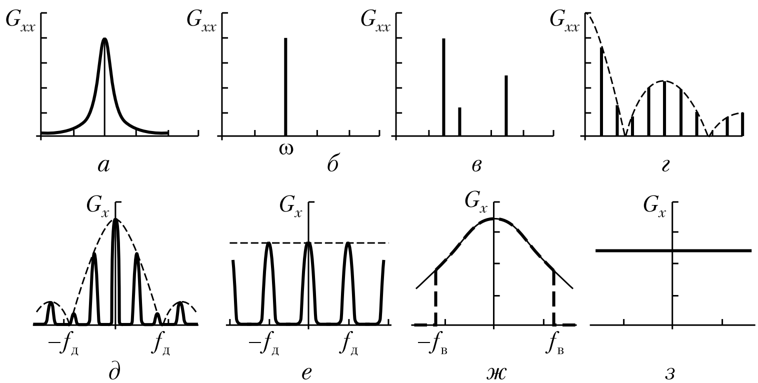

Рис. 1.9. **Спектры сигналов:**

а — узкополосного; *б* — гармонического; *в* — полигармонического; *г* — периодического; *д* — дискретного; *е* — цифрового; *ж* — широкополосного (с финитным спектром); *з* — белого шума

стоты ω (рис. 1.9, *б*). Спектр *полигармонического* сигнала содержит несколько таких гармоник (рис. 1.9, *в*), а спектр периодического сигнала в общем случае содержит бесконечное число гармоник, имеющих кратные частоты (рис. 1.9, *г*).

Спектр дискретного сигнала (1.3) представляет собой последовательность импульсов, промодулированных по амплитуде спектром дискретизирующего импульса (рис. 1.9, *д*), а спектр цифрового сигнала — периодическую последовательность таких импульсов, следующих друг за другом с частотой дискретизации $f_д = 1/T_S$ (рис. 1.9, *е*).

Широкополосный сигнал содержит относительно широкий спектр гармоник (рис. 1.9, *ж*). В предельном случае такой сигнал содержит гармоники всех частот одинаковой интенсивности (рис. 1.9, *з*). Соответствующий случайный сигнал называется *белым шумом*.

Если спектр сигнала отличен от нуля в ограниченном диапазоне частот $|f| \leqslant f_в$ и равен нулю вне этого диапазона (на рис. 1.9, *ж* показан пунктиром), то соответствующий сигнал называется *сигналом с финитным спектром*. В соответствии с теоремой В. А. Котельникова, такой сигнал может быть точно восстановлен по совокупности своих отсчетов, следующих друг за другом с интервалом, зависящим от ширины спектра $T_S < 1/(2f_в)$.

Примечание: на верхних рисунках 1.9 (*а*, *б*, *в*, *г*) показаны вещественные спектры сигналов. Они определены на полуоси частот $0 < f < \infty$ и отражают распределение фактических значений амплитуд спектральных составляющих сигнала G_{xx}. На нижних рисунках (*д*, *е*, *ж*, *з*) показаны составляющие комплексных спектров сигналов $G_x = G_{xx}/2$. Они определены для всех частот $-\infty < f < \infty$.

1.2. Математическое описание аналоговых сигналов

Для оценки свойств и анализа особенностей преобразования сигнала необходима его математическая модель. Наличие такой модели позволяет абстрагироваться от физической природы сигнала, осуществлять сравнение разных сигналов, оценивать их влияние друг на друга и выбирать оптимальные структуру и параметры измерительного устройства исходя из требований, предъявляемых к характеристикам преобразованного сигнала. В теории сигналов используют различные модели измерительного сигнала.

Математической моделью измерительного сигнала во *временной области* является функция времени $x = x(t)$, описывающая изменение мгновенных значений сигнала во времени. Часто ее можно рассматривать как случайную функцию следующей (аддитивной) структуры:

$$x(t) = m_x + m_x(t) + \overset{0}{X} + \overset{0}{X}(t), \tag{1.5}$$

где m_x — детерминированная (заранее известная) постоянная величина; $m_x(t)$ — детерминированная функция времени; $\overset{0}{X}$ — центрированная (с нулевым математическим ожиданием) случайная величина; $\overset{0}{X}(t)$ — центрированная стационарная случайная функция времени.

Примечание: в общем случае составляющая $\overset{0}{X}(t)$ может описывать нестационарный случайный процесс.

Составляющие сигнала (1.5) считаются не зависящими друг от друга.

Первые два слагаемых в выражении (1.5) образуют модель детерминированной составляющей сигнала, последние два — модель его стационарной случайной составляющей. Исключая из (1.5) отдельные слагаемые, можно получать разные модели измерительного сигнала.

В случае статического режима измерений в выражении (1.5) учитываются только те составляющие сигнала, которые не изменяются во времени. В этом случае математической моделью сигнала является модель *случайной величины*

$$x = m_x + \overset{0}{X}, \tag{1.6}$$

например, массы продукта, взвешиваемого на торговых весах, давления воздуха в камере колеса неподвижно стоящего автомобиля, размера изготовленной детали и т.д. Составляющая m_x совпадает с математическим ожиданием измеряемой величины, а слагаемое $\overset{0}{X}$ характеризует случайные отклонения этой величины от ее математического ожидания.

В динамическом режиме измерений мгновенные значения сигнала описывают случайной функцией времени, называемой также *случайным процессом*:

$$x(t) = m_x(t) + \overset{0}{X}(t). \tag{1.7}$$

Такие сигналы типичны для систем управления движением объектов, регистрации динамических процессов и т.д., причем в выражении (1.7) также может отсутствовать какая-либо составляющая сигнала. Например, при экспериментальном определении динамических характеристик прибора он подвергается воздействию *тестовых сигналов* специальной формы: скачка, импульса, гармонических колебаний и др. Такие сигналы являются детерминированными.

Моделью детерминированного сигнала во временной области является заранее известная функция времени

$$x(t) = m_x + m_x(t). \tag{1.8}$$

С помощью такой функции можно описать отдельную реализацию фактического сигнала с целью изучения особенностей реакции прибора на заданное входное воздействие (в частности, на описанный выше тестовый сигнал).

Примечание: выделение в выражении (1.8) постоянной и переменной составляющих является условным. Оно используется при раздельном анализе статического и динамического режимов работы прибора. Например, вместо выражения $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$ можно записать $x(t) = \cos(t)^2$. В первом случае $m_x = \frac{1}{2}$, $m_x(t) = \frac{1}{2}\cos(2t)$, во втором — $m_x = 0$, $m_x(t) = \cos(t)^2$.

Если в выражении (1.5) отсутствует детерминированная составляющая, то

$$x(t) = \overset{0}{X} + \overset{0}{X}(t). \tag{1.9}$$

В этом случае сигнал является чисто случайным, т.е. не имеющим регулярной составляющей, которая сохраняется в каждой реализации сигнала.

Математическая модель стационарного в широком смысле случайного сигнала (см. рис. 1.4, *в*) имеет вид

$$x(t) = m_x + \overset{0}{X}(t). \tag{1.10}$$

Кроме *аддитивной* модели (1.5) применяют *каноническое*, *параметрическое* и другие представления сигнала [4]. Также не единственно возможным является математическое описание сигнала во временной области (в виде функции времени). Наряду с таким *временны́м* описанием широко используется *частотное* представление сигнала. В этом случае для описания детерминированной составляющей сигнала $m_x(t)$ применяется комплексная функция частоты $\dot{G}_x(\omega)$, называемая *спектральной плотностью* сигнала, а для описания его случайной составляющей $\overset{0}{X}(t)$ — вещественная функция частоты $S_x(\omega)$, называемая *энергетическим спектром* сигнала или *спектром мощности*. Эти функции описывают частотное распределение амплитуд и, соответственно, средних значений энергий гармоник сигнала, присутствующих в его детерминированной и случайной составляющих.

В общем случае сигнал может описываться функцией нескольких независимых переменных: времени, пространственных координат, параметров источника сигнала и пр. Такими являются сигналы, содержащие информацию о рельефе земной поверхности, инородном включении, электромагнитной волне, видеоизображении и т.д. В зависимости от числа независимых переменных, входящих в модель сигнала, различают *одномерный*, *двумерный* и прочие n-мерные сигналы. Сигнал, описываемый выражением (1.5), является одномерным сигналом.

Выбор математической модели сигнала определяется простотой и удобством ее использования, а также эффективностью ее применения для решения различных задач преобразования сигналов: обработки, фильтрации, обнаружения, восстановления, оптимизации и др. В радиотехнике сигнал часто описывают комплексной функцией времени $x(t) = a(t) + i \cdot b(t)$, где $i^2 = -1$, i — мнимая единица, и в так называемом Гильбертовом пространстве. Используют также *векторно-матричное* представление сигнала или системы сигналов [4].

Сигналы могут быть *периодическими* или *непериодическими*. Учитывая многообразие форм разных сигналов, выделяют также *полигармонические*, *квазипериодические*, *импульсные* и другие сигналы (рис. 1.10). Для обозначения некоторых сигналов, имеющих специфическую форму, применяют специальные термины: меандр, волновой цуг, телеграфный сигнал, радиоимпульс и пр.

Непериодический сигнал описывается непрерывной однозначной функцией времени $x(t)$ (рис. 1.10, *а*). Обычно считается, что $x(t) = 0$ при $t < 0$, т.е. изучение соответствующего физического процесса начинается с некоторого момента времени, который принимается за начало отсчета.

Такой сигнал называется *односторонним*. Его можно записать в виде $x(t) = s(t) \cdot 1(t)$, где функция $s(t)$ описывает изменение мгновенных значений сигнала, а функция $1(t)$, называемая *единичной функцией*, определяется как

$$1(t) = \begin{cases} 1, t \geqslant 0, \\ 0, t < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

В качестве начала отсчета можно принять любой момент времени (начало текущего года, недели и пр.). В этом случае переменная t может иметь

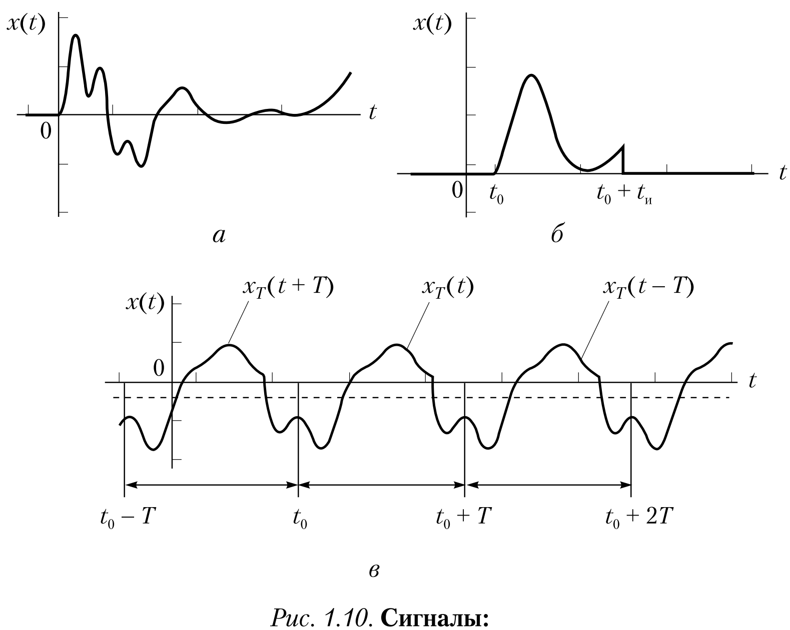

Рис. 1.10. **Сигналы:**

а — непериодический; *б* — импульсный; *в* — периодический отрицательные значения — они соответствуют предшествующим моментам времени.

Импульсный сигнал может быть представлен отдельным импульсом, имеющим конечную длительность $t_и$ (рис. 1.10, *б*), или последовательностью подобных импульсов, в том числе последовательностью импульсов разной формы и длительности.

Сигнал, имеющий ограниченную длительность (в том числе показанный на рис. 1.10, *б*), называется *финитным сигналом*. Такой сигнал обладает неограниченным частотным спектром. На практике все реальные сигналы обладают таким свойством. Однако если длительность сигнала значительно превышает интервал его наблюдения, то соответствующий сигнал приближается к сигналу с финитным спектром.

Периодический сигнал (рис. 1.10, *в*) обладает свойством периодичности: он повторяет свои значения через любой промежуток времени, кратный периоду сигнала T, т.е.

$$x(t) = x(t + nT), \text{ где } |n| = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1.12}$$

Такой сигнал можно представить рядом Фурье (см. (2.17)) или выражением

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_T(t - nT), \tag{1.13}$$

где $x_T(t)$ — *базовый импульс*, описывающий форму сигнала на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ длительности T; t_0 — любое вещественное число (см. рис. 1.10, *в*). Копирование базового импульса путем его сдвига вдоль оси времени на величину, кратную периоду, называемое периодическим продолжением базового импульса, полностью восстанавливает периодический сигнал, т.е. свойства периодического сигнала $x(t)$ целиком определяются свойствами его базового импульса $x_T(t)$.

В природе не существует строго периодических сигналов, так как все они определены на неограниченной числовой оси t $(-\infty, +\infty)$ т.е. являются математической абстракцией. Однако если для достаточно большого промежутка времени (по сравнению с периодом сигнала T) условие периодичности (1.12) выполняется, то соответствующий сигнал $x(t)$ (например, сигнал, описывающий биение сердца человека) на этом промежутке времени можно считать периодическим.

Наиболее распространенной формой периодического сигнала является *гармонический* сигнал

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi), \tag{1.14}$$

где x_m, ω, φ — параметры сигнала: сответственно амплитуда, круговая частота и начальная фаза; $\omega t + \varphi$ — полная фаза сигнала. Такой сигнал совпадает с вещественной частью комплексного гармонического сигнала $s(t) = Ae^{i\omega t}$, т.е. $x(t) = \mathrm{Re}\{s(t)\}$, где $A = x_m e^{i\varphi}$ — комплексная амплитуда сигнала. Его можно также представить в виде проекции на ось Re вектора A, вращающегося с угловой частотой ω (рис. 1.11, *а*) или в виде суммы двух комплексно сопряженных векторов вдвое меньшей длины, вращающихся во взаимно противоположных направлениях с частотой ω (рис. 1.11, *б*).

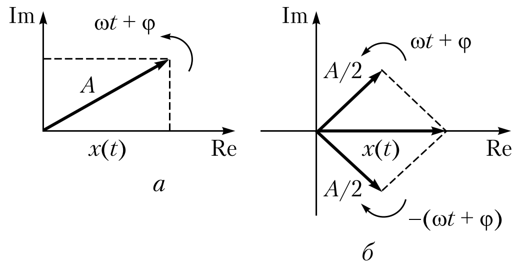

Рис. 1.11. **Векторные аналогии гармонического сигнала:**
а — одновекторная; *б* — двухвекторная

Подобное представление гармонического сигнала является следствием формулы Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha). \tag{1.15}$$

Вращение вектора против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке — отрицательным. Вращение векторов в одном направлении считается синфазным, в противоположных направлениях — противофазным. Угол, образованный вектором с осью Re, совпадает с полной фазой сигнала, начальное значение этого угла — с начальной фазой.

Отметим свойства суммы N гармонических сигналов, т.е. свойства сигнала следующего вида

$$x(t) = x_{m1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_{m2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \ldots + x_{mN}\cos(\omega_N t + \varphi_N). \tag{1.16}$$

1. Если частоты его гармонических составляющих ω_n, $n = 1, 2, \ldots, N$ равны друг другу, т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_N = \omega$, то сигнал (1.16) является гармоническим. В этом случае его можно описать формулой (1.14), в которой следует принять

$$x_m = \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_{mi}x_{mj}\cos(\varphi_i - \varphi_j)\right)^{1/2}; \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{mi}\sin\varphi_i}{\sum_{i=1}^{N} x_{mi}\cos\varphi_i}. \tag{1.17}$$

В частности, если $N = 2$, то

$$x_m = \sqrt{x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2x_{m1}x_{m2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}; \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{x_{m1}\sin\varphi_1 + x_{m2}\sin\varphi_2}{x_{m1}\cos\varphi_1 + x_{m2}\cos\varphi_2}. \tag{1.18}$$

2. Если частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ разные, то сигнал (1.16) является *полигармоническим*. В этом случае если они кратны друг другу, т.е. $\omega_n = n\omega_0$, где n — целое число, то сигнал (1.16) оказывается *периодическим* с периодом $T = 2\pi/\omega_0$. В противном случае он является *квазипериодическим* (почти периодическим). Примером полигармонического сигнала может служить сигнал вида $x(t) = 3\sin t + \cos(4t)$ (рис. 1.12, *б*). Такой сигнал имеет период $T = 2\pi$. В общем случае период полигармонического сигнала определяется как наименьшее общее кратное периодов его гармонических составляющих. Примером квазипериодического сигнала может служить сигнал вида $x(t) = 3\sin t + \cos(\sqrt{3}t)$ (рис. 1.12, *в*). Такой сигнал не имеет периода, так как отно-

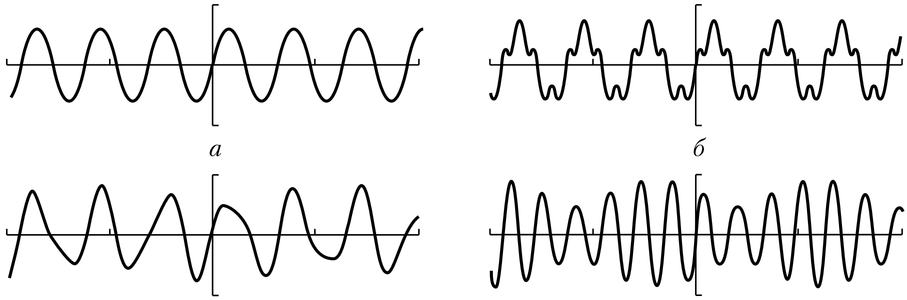

Рис. 1.12. **Сигналы:**

а — гармонический; *б* — полигармонический; *в* — квазипериодический; *г* — биения

шение частот его гармонических составляющих $\omega_1 = 1$ рад/с и $\omega_2 = \sqrt{3}$ рад/с (и соответственно периодов $T_1 = 2\pi$ с и $T_2 = 2\pi/\sqrt{3}$ с) является числом иррациональным.

Если $N = 2$, то сигнал (1.16) называется *двухчастоным* сигналом. Он имеет вид

$$x(t) = x_1 + x_2 = x_{m1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + x_{m2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (1.19)$$

Если $\omega_1 \approx \omega_2$, то такой сигнал можно записать в виде

$$x(t) = x_m(t)\cos[\omega_1 t + \varphi(t)], \qquad (1.20)$$

где $x_m(t)$, $\varphi(t)$ — медленно меняющиеся функции времени. В частности, если $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, то, согласно (1.18), имеем

$$x_m(t) = \sqrt{x_{m1}^2 + x_{m2}^2 + 2x_{m1}x_{m2}\cos(\omega_2 - \omega_1)t};$$

$$\operatorname{tg}[\varphi(t)] = \frac{x_{m2}\sin(\omega_2 - \omega_1)t}{x_{m1} + x_{m2}\cos(\omega_2 - \omega_1)t},$$

т.е. в результате сложения двух гармонических сигналов близких частот получается сигнал, амплитуда и фаза которого изменяются с (малой) разностной частотой $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Соответствующий физический процесс называется *биениями*. На рис. 1.12, *г* он показан для случая, когда $x(t) = 3\sin(t) + \cos\left(\frac{6}{5}t\right)$.

Рассмотренные сигналы являются непрерывными сигналами. С развитием цифровой измерительной техники все более широкое применение получают дискретные сигналы. Математическое описание таких сигналов имеет особенности.

1.3. Математическое описание дискретных сигналов

1.3.1. Дельта-функция

При описании дискретных сигналов и систем дискретного времени часто используют *дельта-функцию*, называемую также *функцией Дирака*. Поясним физический смысл этой функции.

Возьмем прямоугольный импульс $f(t)$ длительностью T и амплитудой $A = 1/T$, площадь которого равна *единице* (рис. 1.13, *а*).

При уменьшении длительности импульса и неизменной площади его амплитуда возрастает. В результате предельного перехода $T \to 0$ получим импульс бесконечной величины, сосредоточенный в точке $t = 0$ и имеющий единичную площадь, т.е.

$$f(t) = \begin{cases} A = 1/T, \text{ при } |t| \leqslant T/2, \\ 0, \text{ при } |t| > T/2 \end{cases} \xrightarrow{T \to 0} \delta(t) = \begin{cases} \infty \text{ при } t = 0, \\ 0 \text{ при } t \neq 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Такой импульс называется *дельта-импульсом*, а описывающая его функция $\delta(t)$ — *дельта-функцией.*

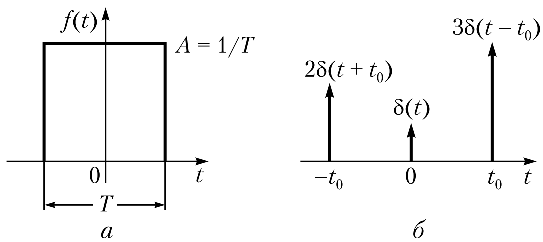

Рис. 1.13. **К иллюстрации понятия «дельта-функция»:**

а — импульс единичной площади; *б* — дельта-функция и смещенные дельта-функции

Дельта-импульс, расположенный на оси времени в произвольной точке $t = t_0$, описывается выражением

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty \text{ при } t = t_0, \\ 0 \text{ при } t \neq t_0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Такой импульс существует только в той точке, где аргумент дельта-функции равен нулю.

На рис. 1.13, *б* графики дельта-функции изображены вертикальными отрезками со стрелками, направленными вверх, причем длина каждого отрезка пропорциональна площади соответствующего импульса. Ее значение определяет постоянный коэффициент, стоящий перед обозначением дельта-функции.

Укажем на четыре основных свойства этой функции.

1. *Площадь дельта-функции.* Из определения дельта-функции следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (1.23)$$

Интегрирование может быть ограничено конечными пределами, если они охватывают точку $t = t_0$.

2. *Размерность дельта-функции.* Дельта-функция имеет размерность, обратную размерности ее аргумента. Это следует из того, что результат интегрирования дельта-функции безразмерный. Чаще всего аргументом дельта-функции является время. В этих случаях ее размерность обратная размерности времени, т.е.

$$[\delta(t)] \to [1/c]. \quad (1.24)$$

3. *Фильтрующее* (*вырезающее*) *свойство дельта-функции.* Для произведения произвольной функции $f(t)$ на смещенную дельта-функцию $\delta(t - t_0)$ справедливо соотношение

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0), \qquad (1.25)$$

которое иллюстрирует рис. 1.14.

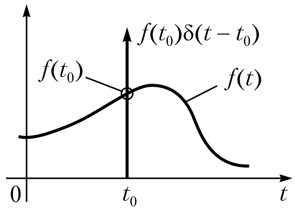

Рис. 1.14. **К иллюстрации фильтрующего свойства дельта-функции**

Постоянный коэффициент $f(t_0)$ определяет площадь дельта-импульса. После интегрирования соотношения (1.25) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt. \qquad (1.26)$$

Учитывая, что интеграл в правой части равен единице, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0). \qquad (1.27)$$

Формула (1.27) выражает фильтрующее (вырезающее) свойство дельта-функции. Согласно этому свойству, интеграл от произведения функции $f(t)$ на смещенную дельта-функцию $\delta(t - t_0)$ равен значению функции $f(t)$ в точке $t = t_0$.

4. *Свертка функции $f(t)$ и дельта-функции.* Операцию свертки функций $f(t)$ и $\delta(t - t_0)$ описывают интегралом

$$f(t) \otimes \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta[(t - t_0) - \tau]d\tau. \qquad (1.28)$$

Применяя к этому интегралу фильтрующее свойство дельта-функции (1.27), получим

$$f(t) \otimes \delta(t - t_0) = f(t - t_0). \qquad (1.29)$$

Следовательно, результатом свертки функции $f(t)$ и смещенной дельта-функции $\delta(t - t_0)$ является смещенная функция $f(t - t_0)$. На рис. 1.15 это правило показано в графической форме.

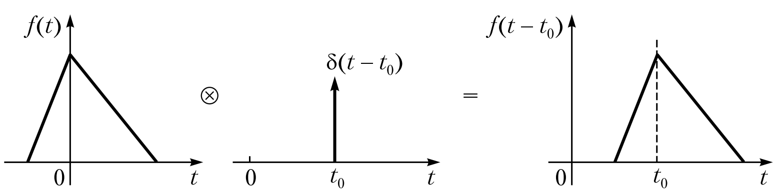

Рис. 1.15. **К иллюстрации свойства «свертка функции и дельта-импульса»**