В. Е. Гмурман

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УЧЕБНИК ДЛЯ ПРИКЛАДНОГО БАКАЛАВРИАТА

12-е издание

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений всех направлений и специальностей

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов

Книга доступна в электронной библиотечной системе biblio-online.ru

ВЫБОР ВУЗОВ РОССИИ 2012

ВЫБОР ВУЗОВ РОССИИ 2014

Москва ▪ Юрайт ▪ 2016

УДК 519.2
ББК 22.171я73
Г55

Книга считается лучшей по теории вероятностей и математической статистике, переведена и издается во многих странах мира

Гмурман, В. Е.

Г55 Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 479 с. — Серия : Бакалавр. Прикладной курс.

ISBN 978-5-9916-6484-4

Пособие содержит в основном весь материал программы по теории вероятностей и математической статистике. Большое внимание уделено статистическим методам обработки экспериментальных данных. В конце каждой главы есть задачи с ответами для контроля знаний.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов вузов и лиц, использующих вероятностные и статистические методы при решении практических задач.

УДК 519.2
ББК 22.171я73

ISBN 978-5-9916-6484-4

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Предмет теории вероятностей. Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следующие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S. Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и температуре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий S. Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти. Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал "герб"» — случайное. Каждое случайное событие, в частности выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета, форма монеты и многие другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет, — она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий S, т.е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Итак, *предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий*.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, хотя, как было уже сказано, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что монету бросают в одних и тех же условиях.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

Краткая историческая справка. Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и другие в XVI—XVII вв.).

Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654—1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закон больших чисел», была первым теоретическим обоснованием накопленных ранее фактов.

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

Новый, наиболее плодотворный период связан с именами П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой. Ее последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам (С. Н. Бернштейн, В. И. Романовский, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов и др.). В настоящее время ведущая роль в создании новых ветвей теории вероятностей также принадлежит советским математикам.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Испытания и события

Выше событие названо случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий S оно может либо произойти, либо не произойти. В дальнейшем, вместо того чтобы говорить «совокупность условий S осуществлена», будем говорить кратко: «произведено испытание». Таким образом, событие будет рассматриваться как результат испытания.

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел — это испытание. Попадание в определенную область мишени — событие.

Пример 2. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара определенного цвета — событие.

§ 2. Виды случайных событий

События называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. Из ящика с деталями наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — несовместные.

Пример 2. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

В частности, *если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий*. Этот частный случай представляет для нас наибольший интерес, поскольку используется далее.

Пример 3. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.

Пример 4. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

События называют *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 5. Появление «герба» и появление надписи при бросании монеты — равновозможные события. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример 6. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости — равновозможные события. Действительно, предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет форму правильного многогранника и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани.

§ 3. Классическое определение вероятности

Вероятность — одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют классическим. Далее укажем слабые стороны этого определения и приведем другие определения, позволяющие преодолеть недостатки классического определения.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них — красные, 3 — синие и 1 — белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной (т.е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления события.

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цветной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события A. Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из урны) назовем *элементарным исходом* (*элементарным событием*). Элементарные исходы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 и т.д. В нашем примере возможны следующие 6 элементарных исходов: ω_1 — появился белый шар; ω_2, ω_3 — появился красный шар; ω_4, ω_5, ω_6 — появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем *благоприятствующими* этому событию. В нашем примере благоприятствуют событию A (появлению цветного шара) следующие 5 исходов: ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6.

Таким образом, событие A наблюдается, если в испытании наступает один, безразлично какой, из элементарных исходов, благоприятствующих A; в нашем примере A наблюдается, если наступит ω_2, или ω_3, или ω_4, или ω_5, или ω_6. В это смысле событие A подразделяется на несколько элементарных событий (ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6); элементарное же событие не подразделяется на другие события. В этом состоит различие между событием A и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию A элементарных исходов к их общему числу называют вероятностью события A и обозначают через $P(A)$. В рассматриваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию A. Следовательно, вероятность того, что взятый шар окажется цветным, равна $P(A) = 5/6$. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где m — число элементарных исходов, благоприятствующих A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

Свойство 1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$$P(A) = m/n = n/n = 1.$$

Свойство 2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$$P(A) = m/n = 0/n = 0.$$

Свойство 3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 < m < n$, значит, $0 < m/n < 1$, следовательно,

$$0 < P(A) < 1.$$

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Далее приведены теоремы, которые позволяют по известным вероятностям одних событий находить вероятности других событий.

Замечание. Современные строгие курсы теории вероятностей построены на теоретико-множественной основе. Ограничимся изложением на языке теории множеств тех понятий, которые рассмотрены выше.

Пусть в результате испытания наступает одно и только одно из событий ω_i ($i = 1, 2, ..., n$). События ω_i называют *элементарными событиями* (*элементарными исходами*). Уже отсюда следует, что элементарные события попарно несовместны. Множество всех элементарных событий, которые могут появиться в испытании, называют *пространством элементарных событий* Ω, а сами элементарные события — *точками пространства* Ω.

Событие A отождествляют с подмножеством (пространства Ω), элементы которого есть элементарные исходы, благоприятствующие A; событие B есть подмножество Ω, элементы которого есть исходы, благоприятствующие B, и т.д. Таким образом, множество всех событий, которые могут наступить в испытании, есть множество всех подмножеств Ω. Само Ω наступает при любом исходе испытания, поэтому Ω — достоверное событие; пустое подмножество пространства Ω — невозможное событие (оно не наступает ни при каком исходе испытания).

Заметим, что элементарные события выделяются из числа всех событий тем, что каждое из них содержит только один элемент Ω.

Каждому элементарному исходу ω_i ставят в соответствие положительное число p_i — вероятность этого исхода, причем $\sum_i p_i = 1$. По определению, вероятность $P(A)$ события A равна сумме вероятностей элементарных исходов, благоприятствущих A. Отсюда легко получить, что вероятность события достоверного равна единице, невозможного — нулю, произвольного — заключена между нулем и единицей.

Рассмотрим важный частный случай, когда все исходы равновозможны. Число исходов равно n, сумма вероятностей всех исходов равна единице; следовательно, вероятность каждого исхода равна $1/n$. Пусть событию A благоприятствует m исходов. Вероятность события A равна сумме вероятностей исходов, благоприятствующих A:

$$P(A) = 1/n + 1/n + \ldots + 1/n.$$

Учитывая, что число слагаемых равно m, имеем

$$P(A) = m/n.$$

Получено классическое определение вероятности.

Построение логически полноценной теории вероятностей основано на аксиоматическом определении случайного события и его вероятности. В системе аксиом, предложенной А. Н. Колмогоровым[1], неопределяемыми понятиями являются элементарное событие и вероятность. Приведем аксиомы, определяющие вероятность:

1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $P(A)$. Это число называется вероятностью события A.

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1.$$

3. Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводят в качестве теорем.

---

[1] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., «Наука», 1974.

§ 4. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов, безразлично какой природы, заданного конечного множества. При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Заметим, что удобно рассматривать 0!, полагая, по определению, $0! = 1$.

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Р е ш е н и е. Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+1).$$

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по два?

Р е ш е н и е. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = n!/\,(m!(n-m)!).$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

Р е ш е н и е. Искомое число способов

$$C_{10}^2 = 10!/\left(2!8!\right) = 45.$$

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

$$A_n^m = P_m C_n^m.$$

З а м е ч а н и е. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае *комбинации с повторениями* вычисляют по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \ldots) = n!/(n_1!\, n_2! \ldots),$$

где $n_1 + n_2 + \ldots = n$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

П р а в и л о с у м м ы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

П р а в и л о п р о и з в е д е н и я. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.

§ 5. Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию A лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = 1/10.$$

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Р е ш е н и е. Обозначим через B событие — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т.е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90.$ Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию B лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(B) = 1/90.$$

Пример 3. Указать ошибку «решения» задачи: «Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4 (событие A)».

Р е ш е н и е. Всего возможны 2 исхода испытания: сумма выпавших очков равна 4, сумма выпавших очков не равна 4. Событию A благоприятствует 1 исход; общее число исходов равно двум. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = 1/2.$$

Ошибка этого решения состоит в том, что рассматриваемые исходы не являются равновозможными.

П р а в и л ь н о е   р е ш е н и е. Общее число равновозможных исходов испытания равно $6 \cdot 6 = 36$ (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию A только 3 исхода: (1; 3), (3; 1), (2; 2) (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = 3/36 = 1/12.$$

Пример 4. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Р е ш е н и е. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (C_{10}^6).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей C_7^4 способами; при этом остальные $6 - 4 = 2$ детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10 - 7 = 3$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \left(C_7^4 \cdot C_3^2\right)/C_{10}^6 = 1/2.$$

§ 6. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события A определяется формулой

$$W(A) = m/n,$$

где m — число появлений события; n — общее число испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действительности; определение же относительной частоты предполагает, что испытания были произведены фактически. Другими словами, *вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту — после опыта*.

Пример 1. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестандартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Относительная частота появления нестандартных деталей

$$W(A) = 3/80.$$

Пример 2. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Относительная частота поражения цели

$$W(A) = 19/24.$$

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, *что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа*. Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Подробнее и точнее связь между относительной частотой и вероятностью будет изложена далее. Теперь же проиллюстрируем свойство устойчивости на примерах.

Пример 3. По данным шведской статистики, относительная частота рождения девочек за 1935 г. по месяцам характеризуется следующими числами (числа расположены в порядке следования месяцев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473.

Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек.

Заметим, что статистические данные различных стран дают примерно то же значение относительной частоты.

Пример 4. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления «герба». Результаты нескольких опытов приведены в табл. 1.

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от числа 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. Например, при 4040 испытаниях отклоненние равно 0,0069, а при 24 000 испытаний — лишь

Таблица 1

Число бросаний	Число появлений «герба»	Относительная частота
4040	2048	0,5069
12 000	6019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

0,0005. Приняв во внимание, что вероятность появления «герба» при бросании монеты равна 0,5, мы вновь убеждаемся, что относительная частота колеблется около вероятности.

§ 7. Ограниченность классического определения вероятности. Статистическая вероятность

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо. Уже это обстоятельство указывает на ограниченность классического определения. Отмеченный недостаток может быть преодолен, в частности, введением геометрических вероятностей (см. § 8) и, конечно, использованием аксиоматической вероятности (см. § 3, замечание).

Наиболее слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Обычно о равновозможности элементарных исходов испытания говорят из соображений симметрии. Так, например, предполагают, что игральная кость имеет форму правильного многогранника (куба) и изготовлена из однородного материала. Однако задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются весьма редко. По этой причине наряду с классическим определением вероятности используют и другие определения, в частности статистическое определение: *в качестве статистической вероятности события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.* Например, если в результате достаточно большого числа испытаний оказалось, что относительная частота весьма близка к числу 0,4, то это число можно принять за статистическую вероятность события.

Легко проверить, что свойства вероятности, вытекающие из классического определения (см. § 3), сохраняются и при статистическом определении вероятности. Действительно, если событие достоверно, то $m = n$ и относительная частота

$$m/n = n/n = 1,$$

т.е. статистическая вероятность достоверного события (так же как и в случае классического определения) равна единице.

Если событие невозможно, то $m = 0$ и, следовательно, относительная частота

$$0/n = 0,$$

т.е. статистическая вероятность невозможного события равна нулю.

Для любого события $0 \le m \le n$ и, следовательно, относительная частота

$$0 \le m/n \le 1,$$

т.е. статистическая вероятность любого события заключена между нулем и единицей.

Для существования статистической вероятности события A требуется:

а) возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие A наступает или не наступает;

б) устойчивость относительных частот появления A в различных сериях достаточно большого числа испытаний.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; так, в приведенном примере в качестве вероятности события можно принять не только 0,4, но и 0,39; 0,41 и т.д.

§ 8. Геометрические вероятности

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрические вероятности* — вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.).

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предполо-