ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. А. Рубчинский

МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ
ДЛЯ АКАДЕМИЧЕСКОГО БАКАЛАВРИАТА

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2017

УДК 338.2(075.8)
ББК 65в6я73
Р82

***Автор*:**

Рубчинский Александр Анатольевич — кандидат технических наук, доцент Департамента математики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», доцент кафедры прикладной математики и информатики Международного университета природы, общества и человека «Дубна».

***Рецензенты*:**

Лепский А. Е. — доктор физико-математических наук, профессор Департамента математики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», заместитель заведующего международной научно-учебной лабораторией анализа и выбора решений;

Черняк В. И. — кандидат экономических наук, доцент кафедры математических методов анализа экономики экономического факультета, заслуженный преподаватель Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Рубчинский, А. А.

Р82 Методы и модели принятия управленческих решений : учебник и практикум для академического бакалавриата / А. А. Рубчинский. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 526 с. — Серия : Бакалавр. Академический курс.

ISBN 978-5-534-03619-0

Изложены основные методы и модели принятия управленческих решений как в условиях определенности, так и при различных видах неопределенности: входа, связанной с взаимодействием людей и организаций, преследующих различные цели; управляемой системы, определяемой характером ее функционирования в сложной и нестабильной внешней среде; цели, связанной с наличием нескольких критериев оценки реакции системы на управляющие воздействия или с отсутствием формальных критериев такой оценки. Учебник содержит большое количество учебных задач, а также значительное число прикладных примеров и реальных кейсов, многие из которых связаны с проектами, выполненными при активном участии автора.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов бакалавриата и магистратуры, обучающихся по экономико-управленческим направлениям и специальностям, а также (особенно в связи с прикладными аспектами) для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная математика и информатика».

УДК 338.2(075.8)
ББК 65в6я73

ISBN 978-5-534-03619-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 2
ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЧАСТНИКОВ

Часть 3
ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СИСТЕМЫ

Часть 4
ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЦЕЛИ

Моим студентам — прошлым, настоящим и будущим.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Приступая к написанию любого разумного — хотя бы по мнению автора — текста, крайне желательно если не ответить, то хотя бы задать себе три взаимосвязанных вопроса.

1. Для кого предназначен этот материал?
2. Чему могут (или должны) научиться предполагаемые читатели?
3. Что является содержанием предлагаемого материала?

Постараюсь дать мои ответы на эти вопросы.

1. Выдающийся математик Пол Халмош в своей известной статье «Как писать математические тексты» призывал авторов четко определять предполагаемую аудиторию: «...представлять конкретного читателя не только полезно... но и жизненно важно».

Аудитория предполагаемого учебника вполне определена. Она состоит из студентов бакалавриата, обучающихся по специальностям экономико-управленческого комплекса: экономика, менеджмент, управление персоналом, государственное и муниципальное управление, бизнес-информатика. Эти специальности попадают между точными, естественными и инженерными науками, с одной стороны, и гуманитарными науками — с другой. В них все в большей степени используется не традиционная математика с точными количественными зависимостями, а формально значительно более простая (хотя и менее привычная) математика, оперирующая более наглядными и качественными моделями. В разных вузах для студентов этих и близких к ним специальностей читаются курсы «Моделирование и управление», «Методы оптимальных решений», «Математические методы моделирования социальных процессов», «Анализ политической и политологической информации», «Методы анализа и обработки данных для принятия управленческих решений», «Математика конфликтов», «Интеллектуальные системы поддержки управленческих решений» и пр. Здесь перечислены только некоторые курсы, которые я преподавал, начиная с 2006 г., в Академии внешней торговли, университете «Дубна» и Высшей школе экономики. Учебных пособий, учитывающих реальные нужды такой аудитории и хоть как-то покрывающих указанные и подобные им курсы, практически нет. Частичным исключением является книга [1], которая вышла уже двумя изданиями. Однако ее структура, излагаемый материал и цели отличны от структуры, материала и целей предлагаемого учебника. Именно это обстоятельство — отсутствие необходимых для работы по реальным курсам материалов — и инициировало подготовку настоящего издания.

2. Честный ответ на вопрос, зачем менеджерам и экономистам необходимо знать какие бы то ни было математические модели, в самом кратком варианте таков: примерно затем же, зачем девочки из хороших семей, пансионерки Смольного института, изучали ведение домашнего хозяйства. Не предполагалось, что они будут что-то из этого делать своими руками, но предполагалось, что они смогут проконтролировать такую работу, а иногда и научить, как правильно стирать белье и мыть пол. Точно так же я не предполагаю, что студенты указанных специальностей когда-нибудь будут разрабатывать математические модели и (или) писать программное обеспечение. Но вот отличать полезную работу от имитации, обычно прикрывающейся наукообразной и компьютерной терминологией, они должны[1]. А некоторым из них придется руководить проектами, в которых использование или разработка формальных моделей входят в качестве важных этапов, или даже руководить организациями, выполняющими — среди всего прочего — и такие проекты.

Иная причина, по которой изучение формальных моделей реальных управляемых систем для данной целевой аудитории является полезным, такова. При упомянутых в конце предыдущего абзаца видах деятельности очень важно почувствовать или угадать, что в той или иной ситуации целесообразно использовать математические модели и, вероятно, стоит пригласить специалиста для более подробного обсуждения данной ситуации. Умение распознать, «увидеть» такие ситуации, можно развить (конечно, при наличии интереса) с помощью специально подобранных примеров. Именно с этой целью в учебник включено большое число реальных и содержательных кейсов и примеров, которые распределены по всему тексту в соответствии с рассматриваемой тематикой. В то же время все они перечислены в специальном списке приложений, вынесенном в конец издания.

Стандартные обоснования полезности математики, типа развития логического мышления, расширения кругозора и пр. здесь не обсуждаются.

3. Ответ на третий вопрос, по сути дела, определяется ответами на первые два — кого и зачем предполагается учить. Дадим просто несколько более подробные объяснения по поводу того, что в учебнике есть, и того, чего в нем нет.

Термин «принятие решений» понимается весьма неоднозначно. Все же имеющийся опыт работы позволяет сделать некоторые общие выводы. Под принятием решений понимаются три разных направления. Остановимся на этом подробнее.

А. С конца 1940-х гг. под ***принятием решений*** стало пониматься определение того значения переменной x, при котором некоторый показатель эффективности W рассматриваемой системы, зависящий от x (часто x — это набор чисел или даже объектов нечисловой природы, например путь в графе) принимает оптимальное (максимальное или минимальное)

---

[1] Замечательный пример такой имитации приводится в книге Н. Паркинсона «Законы Паркинсона» [2] в конце главы «Второстепенство» части «Чужаки и свояки» (с. 143–147 цит. издания).

значение. Само это значение x называется решением соответствующей задачи, например задачи распределения ресурсов, транспортной задачи и пр. От традиционной оптимизации эти задачи, как правило, отличаются дискретным характером, не позволяющим применять мощный аппарат математического анализа, а также прикладной (чаще всего экономической или военной) направленностью, связанной не просто с исследованиями, а с выбором действий, непосредственно влияющих на жизнь многих людей и организаций. В основном методы принятия решений (в указанном смысле) развивались в рамках исследования операций. Первоначальные оптимизационные постановки вскоре были обобщены на различные ситуации, включающие те или иные элементы неопределенности.

Б. В 1960-е гг. стало ясно, что неопределенность цели, конкретнее, наличие нескольких противоречащих друг другу критериев эффективности, не позволяет не только решить, но даже сформулировать задачи принятия решений в виде оптимизационных постановок. На первый план вышли различные методы многокритериальной оценки альтернатив. Особенно важной стала разработка интерактивных процедур, позволяющих в той или иной форме получать информацию от лица, принимающего решения (ЛПР), о его предпочтениях и формировать альтернативы, предпочтительные именно с его точки зрения. Возникшая новая тематика очень быстро обросла терминологией, приложениями, направлениями и пр. под общим именем ***теория и методы принятия решений***. Именно так называется учебник О. И. Ларичева [3] — одного из лучших отечественных специалистов в этой области.

В. Наряду с двумя перечисленными направлениями, в большой степени связанными с математическими подходами к анализу реальных систем, успешно развивается более «гуманитарное» направление, рассматривающее основные функции решения в методологии и организации процесса управления, проблемы разработки, принятия и реализации организационно-управленческих решений, и т.д. По данному направлению издательство «Юрайт» уже выпустило два учебника [4, 5].

Предлагаемое издание посвящено первым двум из указанных направлений. Оно состоит из четырех частей. Первые три части представляют принятие решений в оптимизационной, игровой и стохастической постановке. Последняя часть рассматривает проблематику принятия решений в условиях неопределенности цели — при отсутствии критериев или наличии нескольких критериев. В последней главе приводится обычно не включаемый ни в статьи, ни в книги материал, описывающий ошибки, просчеты и недоразумения, сделанные при выполнении реальных работ. Пусть будущие экономисты и менеджеры учатся на чужих ошибках!

Более подробные объяснения по поводу включенного в издание материала и обоснования выбора рассматриваемых вопросов содержатся во введении, в конце которого формулируются знания, умения и навыки, приобретаемые в результате изучения предлагаемого материала. Коротко о выборе рассмотренных тем можно ответить словами Козьмы Пруткова: «Никто не обнимет необъятного», а также упомянуть о личных пристрастиях.

Большое внимание в учебнике уделяется кейсам и примерам. В него включено значительное число кейсов, бóльшая часть которых инициирована реальными ситуациями. В некоторых случаях сколько-нибудь разумные задания для самостоятельной работы студентов требуют разработки интерактивного программного обеспечения, ориентированного специально на эти кейсы. Это связано с разнообразием исходных содержательных ситуаций и соответствующих формальных постановок, которое не позволяет обойтись двумя-тремя стандартными системами (типа *Excel* и *SPSS*). «По-хорошему», требуется разработка специальных диалоговых систем, позволяющих не просто получать численные результаты, а добиваться достижения тех или иных целей, определяемых исходными содержательными постановками. Такого рода системы я начал разрабатывать около 30 лет назад при подготовке лабораторных работ по курсу «Теория систем и ее приложения», читавшемуся для нескольких специальностей в Московском институте стали и сплавов (ныне металлургическая академия МИСИС). Разработка таких систем, связанных с рассматриваемыми в учебнике кейсами, сейчас активно ведется, и я предполагаю подготовить необходимые материалы вскоре после выхода настоящего издания. Однако в настоящем издании по изложенным выше причинам подобные кейсы не сопровождаются заданиями для самостоятельной работы студентов, что частично компенсируется другими заданиями из практикумов по соответствующим главам.

Как уже говорилось, подготовка учебника инициирована отсутствием изданий того типа и уровня, которые, на мой взгляд, требуются для реального преподавания различных курсов, связанных с многочисленными моделями и методами принятия решений в указанном выше смысле. Речь не идет об отсутствии книг и учебных пособий по этой тематике в целом и особенно по ее отдельным направлениям. Их много, и некоторые из них действительно написаны на высоком научно-методическом уровне. Однако мне представляется, что предлагаемый учебник все же заполняет некоторую нишу, характеризующуюся как указанным кругом специальностей, так и изложением, ориентированным в первую очередь на стандартные формальные подходы к решению содержательных управленческих задач.

Пособие состоит из глав с независимой нумерацией формул, примеров, рисунков и т.д. внутри каждой главы. Ссылки на введение начинаются с буквы В. Главы сгруппированы в четыре части. Главы состоят из параграфов, параграфы могут содержать подпараграфы. При необходимости в подпараграфы включаются пункты. Концы примеров, утверждений, задач и пр. отмечены знаком ■. Практикумы завершают каждую главу, а предметный указатель и список литературы — всю книгу.

Практически все части учебника прошли «обкатку» в течение нескольких лет при преподавании упомянутых выше и других курсов. При выполнении технических задач многие вопросы, казавшиеся почти очевидными, вызывали трудности у большинства студентов. Были и обратные примеры, когда некоторые задачи, казавшиеся мне более сложными, проблем не вызывали. Полученный при этом очень важный опыт учтен — насколько это возможно — в предлагаемом материале.

Разнообразный материал, включенный в издание, позволяет читать по нему курсы на различном уровне с учетом реальной математической подготовки студентов. С этой целью главы сделаны настолько независимыми, насколько это возможно, да и в каждой из них можно ограничиться самыми базовыми темами или, напротив, рассмотреть более глубокие вопросы.

Только теперь, заканчивая предисловие, после объяснения того, чему посвящена предлагаемая книга, можно кратко сформулировать, чему могут научиться студенты с ее помощью. Представляется, что студенты будут:

- ***знать*** базовые методы и модели принятия управленческих решений как в условиях определенности, так и при основных видах неопределенности;
- ***уметь*** представлять содержательные прикладные задачи достижения цели в формальном виде, допускающем применение рассмотренных в учебнике методов и моделей принятия управленческих решений;
- ***владеть*** формальными методами принятия управленческих решений для решения представленных в учебнике модельных и реальных задач.

Следует сказать, что настоящий учебник предполагает некоторое развитие. Об интерактивных компьютерных системах я уже упомянул. Предполагается также подготовка более «продвинутого» пособия «Теория игр и исследование операций» для специальности «Прикладная математика и информатика», в котором будет и более сложный материал, и больше опущенных здесь доказательств. Наконец, предполагается разработка электронной интерактивной версии настоящего учебника. Но все это, как писал в своих дневниках Л. Н. Толстой, задумывая новые произведения, — «ебж» (если буду жив).

И последнее. При огромном уважении и любви ко многим замечательным ученым — живым и ушедшим от нас, — с которыми мне «и довелось, и посчастливилось» встречаться и работать, я посвящаю этот скромный труд моим студентам — бывшим, настоящим и будущим. В конце концов, я работаю с ними и для них.

Выражаю благодарность заведующему кафедрой высшей математики на факультете экономики НИУ ВШЭ профессору Ф. Т. Алескерову и заведующему кафедрой прикладной математики и информатики университета «Дубна» профессору Л. А. Муравью за многолетнюю дружескую поддержку и предоставленную возможность преподавания различных курсов кибернетического направления, без чего предлагаемое издание было бы невозможным.

Выражаю признательность директору Института индустриальной математики в Беэр-Шеве Адиру Придору и сотрудникам этого института. Без опыта выполнения разнообразных прикладных проектов в этом институте предлагаемая книга не была бы написана. Благодарю всех моих коллег, оказавших на меня огромное влияние. Не желая обидеть тех, кто не упомянут, я считаю необходимым вспомнить ушедших от нас М. Б. Гендлера, М. А. Розенблата, М. А. Красносельского, М. А. Айзермана и, к счастью, продолжающего активную творческую работу С. В. Емельянова.

Я благодарен моей жене Н. Н. Бирюковой, без чьей поддержки, терпения и любви ни этой, ни предшествующих книг просто не было бы.

Отдельное спасибо редактору издательства «Юрайт» Е. А. Улановской за внимание к работе и советы, позволившие улучшить изложение материала.

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Немного истории

Начнем с исторического примера. С 20 по 25 июня 1966 г. в Лондоне состоялся 3-й конгресс ИФАК (*International Federation on Automatic Control, IFAC*) — одной из наиболее известных и влиятельных международных научных организаций. Она была основана в 1957 г., а ее 1-й конгресс состоялся в Москве в 1960 г. Среди его участников был сам Норберт Винер — «отец кибернетики», один из крупнейших ученых XX в.

О значимости ИФАК (а по сути — об интересе к науке об управлении) в то время говорит хотя бы то, что заключительный банкет лондонской конференции посетил тогдашний премьер-министр Великобритании Гарольд Вильсон. Вот что он сказал собравшимся:

— Когда я ехал к вам, то спросил у своих советников, чем занимается ваша наука. Они мне объяснили, что эта наука разрабатывает методы достижения целей — оптимальным образом, в условиях неопределенности, помех и противодействия. Поэтому я думаю, что попал как раз туда, куда мне давно надо было попасть. Ведь я всю жизнь занимаюсь именно этим — достижением целей, по возможности оптимальным образом, в условиях неопределенности, помех и противодействия.

Мысль Вильсона можно продолжить: тем же самым занимаются практически все люди. Однако в обычной жизни цели достигаются без какой бы то ни было науки, просто на основе опыта и здравого смысла. Например, для достижения цели — перейти на другую сторону улицы — наука не нужна. А вот выбор места для строительства подземного перехода уже может потребовать чего-то бóльшего, чем простые интуитивные рассуждения.

В отличие от всех остальных людей, занимающихся достижением целей «по ходу дела» (впрочем, иногда очень сложного), для менеджеров достижение целей служит основой профессиональной деятельности, за выполнение которой они и получают заработную плату. Желание хотя бы в некоторой степени помочь им в тех ситуациях, в которых формальный анализ представляется полезным, и инициировало написание предлагаемого учебника.

Внимательный (и поэтому въедливый) читатель в этом месте может заметить, что книга называется «Методы и модели принятия управленческих решений», а здесь говорится о методах достижения целей. Есть ли между этими двумя видами деятельности какая-либо связь? Читатель прав. Как это ни печально, вошедшая в обиход неформальная терминология часто приводит к подобным мнимым нестыковкам. Поскольку вводимые далее понятия являются и очень важными, и широко распространенными, к их изложению мы переходим прямо сейчас.

В.2. Достижение целей и управленческие решения

Схема на рис. В.1 представляет в общем виде структуру процесса управления (он же — процесс достижения цели). Похожие схемы приводятся в многих изданиях (см., например, [6]). Дадим описание отдельных блоков схемы и связей между ними.

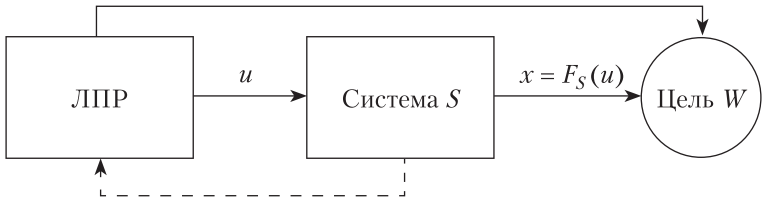


Рис. В.1. **Общая блок-схема процесса управления**

- Под ***лицом***, ***принимающим решения*** (ЛПР), понимается тот человек (группа людей, организация, комитет и т.д.), который заинтересован в достижении системой S некоторой цели W, принимает различные меры, направленные на достижение этой цели, и отвечает за это перед другими людьми и организациями.

Собственно говоря, ЛПР и определяет саму цель W, что показано стрелкой, ведущей от ЛПР к цели W. Упомянутая возможность воздействия ЛПР на систему S показана стрелкой, связывающей ЛПР и систему S. Символ $\boldsymbol{u}$, стоящий у этой стрелки, служит условным обозначением такого воздействия, как правило, называемого ***управлением***, а в системах организационного типа — ***управленческим решением***. Таким образом, управленческое решение — это управление, выбираемое лицом, принимающим решения (в отличие от многих технических систем, в которых управление определяется автоматически).

Большой прямоугольник в центре схемы представляет собой условное обозначение одного из основных понятий в принятии решений — понятия ***управляемой системы***. Ограничиваясь интуитивным понятием системы, скажем, что управляемая система не является системой какого-то особого вида, отличного от всех остальных. Понятие управляемой системы связано не с теми или иными специальными свойствами конкретных систем, а с вполне определенным взглядом, ***точкой зрения*** на любые системы. С этой точки зрения система характеризуется:

- наличием *входа*, т.е. возможностью воспринимать внешние воздействия на нее;
- наличием *выхода*, т.е. возможностью получать информацию о системе;
- *связью* между входом и выходом системы.

Суть дела в том, что управляемая система каким-то образом (известным, частично известным или совсем неизвестным для ЛПР) *реагирует* на управление $\boldsymbol{u}$, что выражается некоторой зависимостью выхода $\boldsymbol{x}$ системы S от входа $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{x} = F_S(\boldsymbol{u})$. В простейших случаях эта связь может быть функциональной, т.е. выход $\boldsymbol{x}$ однозначно определяется по входу $\boldsymbol{u}$, но в реальных ситуациях она может носить качественный и неформализованный характер. Вход и выход обозначены стрелками, ведущими к системе и от системы.

Цель W представлена кружком справа от прямоугольника, изображающего систему S. В основном цель W формулируется в виде требований ЛПР к выходу $\boldsymbol{x}$ системы, поэтому стрелка, обозначающая выход системы, направлена к цели. Напомним, что выход $\boldsymbol{x}$ содержит доступную (для ЛПР) информацию о данной управляемой системе S. Примерами целей, рассматриваемых в большинстве организаций, являются увеличение дохода, сокращение затрат, освоение средств, рост и развитие и пр. ЛПР анализирует степень соответствия выхода $\boldsymbol{x}$ цели W и в зависимости от ситуации либо удовлетворяется этим соответствием (говорят, что цель достигнута), либо нет. Во втором случае по выходу $\boldsymbol{x}$ и цели W определяется новое управление $\boldsymbol{u}'$, и процесс управления продолжается.

Штрихованная линия от выхода системы к ЛПР называется ***обратной связью***. Именно обратная связь позволяет ЛПР оценить степень соответствия между желаемым и достигнутым и предпринять необходимые меры для их сближения. Особенно это важно в тех случаях, когда точная зависимость $F_S(\boldsymbol{u})$ неизвестна.

Подводя итоги этому параграфу, можно сказать, что управленческие решения (т.е. выбираемые ЛПР воздействия на систему) — единственное средство достижения поставленной перед системой цели. Таким образом, методы принятия управленческих решений и являются, по сути дела, методами достижения цели. Эти методы будут рассматриваться в рамках общей блок-схемы управления на рис. В.1, которая, естественно, будет уточняться и модифицироваться применительно к конкретным видам систем, целей и управлений.

В.3. Примеры управляемых систем

Приведем несколько достаточно простых примеров, иллюстрирующих общую блок-схему управления на рис. В.1.

Пример В.1. Компания продает 1000 телевизоров в неделю по цене 450 долл. США за штуку. Маркетинговое исследование показало, что при каждом снижении цены на 10 долл. число проданных телевизоров возрастет на 100. Какую скидку необходимо предоставить, чтобы максимизировать доход компании?

В данном случае в качестве ЛПР выступает руководство компании (или даже ответственный по продажам). Управленческим решением служит величина скидки; системой можно считать рынок телевизоров; выход системы — это доход от продажи телевизоров, который в данном случае известен в явном виде:

$$D = (450 - r)(1000 + 10r). \qquad (\text{В}.1)$$

Цель в данном случае очевидна и указана в самом условии — максимизация дохода. В формуле (В.1) r означает управленческое решение — скидка в долларах. При скидке r число 10-долларовых снижений равно $0{,}1r$ и, по маркетинговым данным, число продаж увеличится на величину $(0{,}1r) \cdot 100 = 10r$. Доход, равный произведению цены $450 - r$ на число продаж $1000 + 10r$, дается формулой (В.1). Рассматриваемая функция представляет собой многочлен 2-й степени от переменной r: $-10r^2 + 3500r + 450\,000$. Ее максимум достигается при $r = 175$ (проверьте это дифференцированием по r). Соответствующий максимальный доход равен

756 250 долл., что заметно больше исходного значения (при цене 450 долл.), равного 450 000 долл. ■

Конечно, приведенный пример — один из наиболее простых. В нем известно все — возможные действия ЛПР, реакция системы, цель. Такие ситуации являются скорее исключением из правила и встречаются в реальных случаях крайне редко. Однако методы принятия решений в условиях определенности остаются той формальной основой, без которой невозможно перейти к значительно более сложным методам при разных видах неопределенности.

Пример В.2. *Распределение обязанностей.* Рассматриваемая в данном примере ситуация подробно описана в параграфе 5 гл. 9 книги [1]. Речь идет о распределении обязанностей в трудовом коллективе. При таком распределении, как правило, руководствуются должностной инструкцией. Вместе с тем известно, что люди выполняют разную работу с разной степенью эффективности. Например, в отделе маркетинга фирмы один из сотрудников может с удовольствием общаться с внешними организациями, ездить в командировки, принимать посетителей и т.п., но хочет избегать кабинетной работы. Другой сотрудник, наоборот, с удовольствием будет заниматься «черновой работой»: сидеть по вечерам в офисе, вводить в компьютер и анализировать данные, писать отчет, но никогда не захочет выехать в командировку. Во многих случаях даже такие достаточно очевидно устранимые противоречия могут вызвать проблему. Не всегда человек хочет или решается высказывать свое негативное отношение к функциям, входящим в его обязанности. Начальник может не понять ситуации, возможны искажения предпочтений, вызванные подозрительностью или неприязнью. Весьма распространена зависть, когда человека вроде и устраивает то, что он делает, но ему кажется, что другому лучше, а это он воспринимает как обидную несправедливость.

Предположим, что два сотрудника независимо друг от друга заполнили специальную таблицу, в которой они указали свои предпочтения относительно разных видов работы. Эти данные представлены в табл. В.1. Требуется так разделить обязанности, чтобы в наибольшей степени удовлетворить указанные предпочтения.

Таблица В.1

Распределение обязанностей

№ п/п	Обязанность	Предпочтения сотрудника	
		первого	второго
1	Командировка сроком не более недели	5	40
2	Командировка сроком более недели	5	30
3	Необходимость задержаться после окончания рабочего дня	20	5
4	Необходимость работать в выходной	10	10
5	Участие в семинаре за рубежом	10	10
6	Написание аналитического отчета	50	5
	Итого	100	100

Вернемся к общей схеме рис. В.1. В данном случае ЛПР — это начальник отдела маркетинга. Его управленческие решения состоят в распределении работ между двумя данными сотрудниками, систему образуют сами эти сотрудники, а выход системы — это два числа, равные удовлетворенности сотрудников. Числа эти легко найти. Например, если пункты 1, 3 и 5 достанутся 1-му сотруднику, а пункты 2, 4 и 6 — 2-му, то удовлетворенность 1-го сотрудника будет $5 + 20 + 10 = 35$, а удовлетворенность 2-го сотрудника составит $30 + 10 + 5 = 45$ (см. табл. В.1). Если же какой-то пункт делится между участниками в некоторой пропорции, то в сумму входит удовлетворенность участника, умноженная на соответствующую долю. Например, если все командировки сроком не более недели разделить пополам между обоими сотрудниками (они должны ездить в них по очереди), то удовлетворенность 1-го сотрудника от этого пункта будет равна $5 \cdot 0,5 = 2,5$, а удовлетворенность 2-го сотрудника — $40 \cdot 0,5 = 20$.

Что касается цели, то она в данном случае не определена. Понятно, что бо́льшие значения удовлетворенности обоих сотрудников с точки зрения ЛПР лучше, чем меньшие значения. Однако степень достижения цели, на которую и ориентируется ЛПР, здесь в явном виде не указана. Подробное изложение важных и применимых в самых разнообразных ситуациях методов справедливого дележа дается в параграфе 7.2.

Прежде чем закончить пример, приведем оптимальное управленческое решение. В данном случае 1-й сотрудник получает пункты 3, 4 и 6, 2-й сотрудник — пункты 1, 2 и 5, и каждый получает по 80 баллов из 100 возможных. Любитель поездок будет ездить в командировки, любитель кабинетной работы — писать аналитические отчеты и задерживаться по вечерам, один из них при необходимости будет работать в выходные дни, другой — участвовать в семинарах. Безусловно, это простое решение будет приносить значительно бо́льший психологический эффект и способствовать высокой мотивации работников, которые убедились в справедливости этого решения и столь высоком уровне учета высказанных ими предпочтений. В гл. 7 будет показано, что данное решение является оптимальным в том смысле, что ни при каком другом распределении обязанностей невозможно, чтобы оба получили больше: если один получит больше 80 баллов, то другой обязательно получит меньше. ■

В следующем примере мы столкнемся с ситуацией, когда не определены многие элементы общей схемы.

Пример В.3. Дадим описание простой и всем знакомой ситуации, рассмотренной в учебном пособии [7]. Человек выходит из дома, чтобы ехать на работу, боится опоздать и размышляет: каким транспортом воспользоваться? Трамвай ходит часто, но идет долго; автобус — быстрее, но с большими интервалами. Можно, конечно, взять такси, но это обойдется дорого. Есть еще такое решение: часть пути проехать на метро, а затем взять такси. Но на стоянке может не быть машин, а добираясь до работы со станции метро пешком, он рискует опоздать больше, чем если бы ехал автобусом. Как ему поступить?

Приведенная ситуация — весьма упрощенная задача достижения цели в условиях неопределенности. ЛПР здесь — это Вы сами. Ваше управленческое решение состоит в выборе маршрута поездки на работу (поскольку Вы можете часть пути преодолеть пешком, то «поездка» понимается в широком смысле, включающем и пешее передвижение). Далее, идя по стрелке по общей блок-схеме слева направо, приходим к управляемой системе. Таковой здесь является городской транспорт. Реакцией системы на выбранный Вами маршрут служат две величины — время и стоимость проезда. Но обе они не определяются однозначно по выбранному маршруту. Время зависит от времени ожидания наземного транспорта и ставших уже обычными пробок. Но так как стоимость проезда в такси в больших городах теперь определяется и временем (типа 500 руб.за посадку + 10 руб. за каждую минуту), то стоимость проезда также зависит от пробок. Конечно, метро работает значительно надежнее (слава богу, пробок под землей пока не бывает), однако оно есть не везде, и если рассчитывать только на метро, то придется потратить на дорогу слишком много времени.

Поговорим о цели, которую Вы определяете сами. Сразу скажем, что Ваше появление на работе (в вузе, в гостях и т.д.) *целью не является*. Оно — обязательное требование (ограничение) и не зависит от выбора маршрута. Ваша цель — минимизация как времени проезда, так и стоимости выбранного маршрута. Понятно, что эти два требования несовместимы — наиболее дешевый маршрут не будет самым быстрым, а наиболее быстрый не будет самым дешевым. При поездке же из дома до работы на такси в часы пик этот маршрут может оказаться и очень медленным, и весьма дорогим. Поэтому Вы должны принять компромиссное, приемлемое по обоим критериям, решение. Если Вы недавно уже получили выговор за опоздание, то время для Вас будет важнее всего остального, а на другой день после получки, вероятно, важность денег при выборе маршрута будет не столь велика, как перед получкой.

В рассмотренной ситуации Вы имеете дело одновременно с двумя видами неопределенности: неопределенность системы (точнее, реакции системы на управления) и неопределенность цели (в данном случае проявляющая себя в наличии двух критериев). Оба вида неопределенности и, главное, методы борьбы с ними будут подробно рассмотрены в настоящем учебнике. ■

Несмотря на сложность ситуации, изложенной в примере В.3, миллионы людей в Москве и других больших городах по всему миру все же справляются с этой ситуацией просто на основе личного опыта и здравого смысла. В конце концов, от нас же не требуется находить оптимальные маршруты — достаточно просто появляться там, куда мы собирались, не слишком опаздывая и не раздражая ни начальство, ни друзей. Однако как только мы переходим с «личного» уровня на «публичный», те же транспортные проблемы требуют совершенно другого уровня решений, а ошибки приводят не только к большим денежным потерям, но и к заметным неудобствам для многих тысяч человек.

Рассмотрим — хотя и совсем поверхностно — пример, в котором неопределенность присутствует и на входе.

Пример В.4. Вернемся к ситуации, рассмотренной в примере В.2. При оптимальном (с точки зрения менеджера подразделения) распределении работ удовлетворенность сотрудников зависит только от заполнения ими таблицы типа табл. В.1. Примем сейчас не точку зрения менеджера, а точку зрения одного (скажем, 1-го) сотрудника. Само распределение работ и, следовательно, его удовлетворенность будут зависеть не только от того, как он оценивает пункты, но и от того, как эти пункты оценивает 2-й сотрудник. Таким образом, мы здесь имеем другое «наполнение» основной блок-схемы. Теперь ЛПР — это 1-й сотрудник. Его управленческое решение — это указание им своих предпочтений. В качестве системы можно рассматривать известный обоим сотрудникам используемый менеджером алгоритм распределения работ, в качестве выхода системы — определяемое упомянутым алгоритмом удовлетворение 1-го сотрудника. Цель ЛПР (т.е. 1-го сотрудника) — максимизация его удовлетворения от распределения обязанностей.

В отличие от рассмотренных ранее примеров здесь выход системы зависит не только от действий ЛПР и возможных случайностей (как в примере В.3), но и от действий другого участника, который *также преследует свои цели*. Вообще говоря, его цели могут сильно отличаться от целей ЛПР и даже быть им противоположны. По сути дела, здесь мы имеем дело с несколькими ЛПР, пытающимися управлять одной и той же системой. Такая ситуация называется ***неопределенностью входа***. Ситуации данного типа являются по своей сути конфликтными. Они чрезвычайно распространены на всех уровнях — от семьи до мирового сообщества. Исследованию и анализу конфликтных ситуаций посвящен один из наиболее важных разделов прикладной математики — теория игр. Однако, кроме игровых конфликтов, в последние годы большое внимание уделяется моделям взаимодействия неигрового характера. ■

В.4. Структура и содержание издания

Изложение методов принятия решений ведется в соответствии с общей блок-схемой рис. В.1. Различные части учебника связаны с рассмотрением различных видов неопределенности — уже упомянутых в примерах из предыдущего параграфа неопределенности входа, системы и цели.

В.4.1. Хотя многие вопросы, затронутые в части 1, являются важными сами по себе, в то же время эта часть остается вспомогательной, поскольку в ней рассматривается принятие управленческих решений в условиях определенности, когда все элементы общей схемы — ЛПР, управляемая система, цель, множество управлений, зависимость выхода от входа — предполагаются известными. При этом во многих случаях рассмотренные задачи допускают естественные обобщения на более сложные ситуации в условиях неопределенности. Это подтверждает целесообразность предварительного знакомства с более простыми методами в этой части.

Из многих задач, возникающих в условиях определенности, в учебнике рассматриваются только задачи оптимизации, преимущественно дискретной. Это связано с характером управленческих задач в организационных системах, в которых мощный аналитический аппарат традиционной математики оказывается почти неприменимым (в отличие от задач, возникающих в технике).

В.4.2. В части 2 рассматриваются решения в условиях неопределенности входа. На многочисленные ситуации такого типа естественно смотреть с двух разных точек зрения, которые условно можно назвать внутренней и внешней. С *внутренней* точки зрения мы ассоциируем себя с одним из участников взаимодействия (или же на самом деле являемся им), пытаясь добиться наилучших для этого участника результатов, при том, что действия других участников (также преследующих свои цели) от нас не зависят. В силу такой точки зрения эта проблематика ориентирована больше на конфликты, чем на сотрудничество. Она относится к теории игр, является хорошо и подробно исследованной и имеет многочисленные приложения в самых разных реальных ситуациях. С *внешней* точки зрения мы ассоциируем себя не с одним из участников взаимодействия, а с теми людьми и (или) ведомствами, организующими это взаимодействие и разрабатывающими правила, в рамках которых оно и проистекает. При этом предполагается, что результат взаимодействия всех участников, преследующих свои индивидуальные цели, будет достаточно разумным с более общей точки зрения, которая больше ориентирована на сотрудничество, чем на конфликт. Люди и организации, заинтересованные в результатах подобных взаимодействий и разрабатывающие их правила, иногда называются ***метаигроками***, что подчеркивает их особую — по сравнению с остальными участниками — роль. В примерах В.4 и В.2 уже встречались с такого рода разными постановками управленческих задач, связанными, по сути дела, с одной и той же управляемой системой.

В.4.3. В части 3 рассматриваются ситуации неопределенности системы. По сути дела, речь идет о тех случаях, когда выход системы не определяется однозначно по ее входу. Понятно, что традиционные оптимизационные постановки для таких систем малопродуктивны — именно в силу отсутствия обычной во многих приложениях функциональной зависимости выхода от входа. Однако «знание некоторых принципов возмещает незнание некоторых фактов» (Гельвеций). Такие принципы предложены и для выработки управленческих решений в случае неопределенности системы. Один (но не единственный!) из таких принципов — хорошо известная идея обратной связи, когда процесс управления происходит во времени, а не является однократным волевым актом. Например, для поддержания комфортной температуры в комнате бывает достаточным открыть окно, когда становится жарко, и закрыть его, когда становится холодно. Никаких математических моделей при этом не требуется. Иной подход применим, когда можно говорить о стохастическом, т.е. случайном, характере процессов в рассматриваемой системе. В таких случаях часто оказывается возможным заменить случайные величины их средними значениями и тем самым перейти от стохастических систем к детерминированным. Именно так рассматриваются системы массового обслуживания и управления запасами, а также некоторые другие системы, в которых необходимо учитывать человеческий фактор. Иногда по отдельным измерениям бывает возможным восстановить с достаточной точностью упомянутую выше неизвестную зависимость (идентификация). Наконец, во многих случаях полезными оказываются так называемые экспертные оценки — обобщенное мнение специалистов по конкретному вопросу.

Некоторые из упомянутых подходов рассмотрены в части 3. Основное внимание уделено формальным моделям таких систем, которые являются характерными для принятия управленческих решений в организационных системах. В большинстве случаев в силу сложности рассматриваемых систем говорить о формальных методах оптимизации (или других подобных целях) затруднительно. Как правило, можно ограничиться сравнением нескольких вариантов или объемным вычислительным экспериментом с элементами имитационного моделирования.

В.4.4. В части 4 рассматриваются ситуации неопределенности цели. Во многих случаях целью ЛПР остается оптимизация, т.е. выбор лучших управленческих решений, при которых выход системы принимает максимально (или минимально) возможное значение. В то же время в реальности мы часто встречаемся с другими ситуациями. К ним относятся следующие.

1. Отсутствие критериев оптимизации, когда варианты возможных решений представляют собой цельные нерасчленимые объекты, некоторые из которых можно только попарно сравнивать с точки зрения «качества» (зачастую формально не определенного).

2. Наличие нескольких критериев оптимизации, отражающих различные важные свойства и аспекты альтернатив, которые желательно одновременно улучшить. Такова ситуация в примере В.3, когда маршрут оценивается по двум критериям: временем в пути и стоимостью, которые желательно минимизировать.

3. Необходимость принятия коллективных или групповых решений, которые связаны с согласованием разных точек зрения, поиском компро-

мисса и т.д. Заметим сразу, что такая ситуация принципиально отличается от упомянутой выше ситуации с несколькими ЛПР, преследующими разные цели.

В этих трех случаях классические оптимизационные модели не работают, поэтому в последние десятилетия большое внимание уделяется новым подходам и методам решения указанных и близких к ним задач. При отсутствии критериев оптимизации для нахождения лучших альтернатив используются общие понятия, модели, методы и алгоритмы теории бинарных отношений, формализующей понятие оптимизации на основе попарных сравнений. При наличии нескольких критериев центральным считается понятие множества Парето, содержащего оптимальные с точки зрения нескольких критериев альтернативы из исходного множества. Разработаны методы коллективных решений, позволяющие эффективно согласовывать индивидуальные точки зрения и четко выделять возникающие здесь принципиальные трудности, выраженные знаменитой теоремой Эрроу.

Новые возможности выбора альтернатив, не определяемые одними только результатами попарных сравнений альтернатив, но опирающиеся на более широкие взаимозависимости между ними, формализованы понятием функции выбора, появившимся в 1970-е гг.

Наконец, рассмотрены наиболее известные интерактивные методы принятия решений при нескольких критериях, самую суть которых составляют возможности получения той или иной информации от ЛПР о сравнительной важности критериев.

Разумеется, распределение материала учебника по видам неопределенности носит чисто методический характер. В реальных ситуациях могут встречаться все указанные виды неопределенности в любых комбинациях. Однако не содержательная сложность рассматриваемых ситуаций и тем более не математические трудности признаются главным препятствием при использовании эффективных методов принятия управленческих решений. На первый план выходит человеческий фактор. К сожалению, практически во всех пособиях описаны примеры только успешных внедрений. Иногда, как в книге [8], предлагаются рекомендации, повышающие шанс на внедрение (типа привлечения сотрудников организации в качестве соавторов научных публикаций по данной теме и пр.), но не более того.

Положительные примеры также упоминаются или даже подробно рассматриваются в большинстве глав предлагаемого учебника. Поэтому представляется важным и целесообразным привести в последней главе примеры неудачных работ — неудачных не в техническом плане (здесь все было в порядке), а в плане их использования, точнее, отказа от использования, да и от оплаты. Пусть достаточно подробно описанные ошибки человеческого характера послужат уроком и предостережением для будущих менеджеров и экономистов!

Во всех случаях упор в изложении делается не на технических деталях, а на «человеческих» ошибках исполнителей. Я принимал активное участие во всех этих работах, так что материал основан в большой степени на личном опыте.

Часть 1
ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Из многочисленных содержательных и формальных задач принятия решений в условиях определенности в учебнике рассматриваются только задачи оптимизации, преимущественно дискретной. Это связано с характером управленческих задач в организационных и социально-экономических системах. Наиболее принципиально здесь даже не само по себе наличие людей и необходимость учитывать «человеческий фактор», а их особая роль в таких системах. Ведь люди оказываются — зачастую одновременно — и объектами, и субъектами управления. Описание их решений, реакций на различные воздействия и ситуации и пр. вряд ли когда-нибудь будет формализовано до такой степени, которая позволяет применять мощный аналитический аппарат традиционной математики, в первую очередь дифференциальные уравнения и вероятностно-статистический анализ. Отдельные исключения, при всей своей успешности, оказываются связанными с моделями достаточно ограниченных ситуаций, и их применение, как правило, не является сколько-нибудь определяющим в этой сфере. Суть дела в том, что традиционные (их теперь, следуя выдающемуся математику В. И. Арнольду, чаще называют жесткими) модели требует точной количественной информации, которая — в силу естественных причин, связанных с человеческим поведением, реакциями и эмоциями, — во многих случаях просто не существует.

В то же самое время сравнительно простые дискретные оптимизационные постановки позволяют описать достаточно широкий круг практически важных, разнообразных и, главное, содержательно понятных ситуаций. Основываясь на излагаемых в этой части учебника понятиях, моделях и методах, можно сравнительно безболезненно перейти к более сложным, но все же содержательно достаточно ясным ситуациям в условиях неопределенности.

- Под ***дискретной оптимизацией*** понимается оптимизация числовых функций, заданных на конечных множествах.

Трудно рассчитывать на какую-либо теорию для столь широкого класса задач. Поэтому обычно рассматриваются специальные подклассы задач, которые, с одной стороны, вызывают практический интерес и с другой — поддаются решению при реальных размерностях. В качестве таких подклассов здесь выбрана оптимизации на графах, дискретная многошаговая оптимизация и оптимизация линейных функций при линейных ограничениях (линейное программирование).

Оптимизация на графах является, вероятно, самым известным классом дискретных оптимизационных задач. Во-первых, графами моделируются многие разнообразные реальные системы, в силу чего задачи оптимизации таких систем представляются именно как задачи оптимизации на графах. Во-вторых, специфические свойства и геометрическая наглядность многих объектов, связанных с графами, — путей, циклов, остовных деревьев, разрезов, потоков и пр. — позволяет предложить эффективные методы выбора из них объектов, оптимальных в том или ином смысле. В-третьих, многие общие и частные задачи дискретной оптимизации, в которых нет никакого упоминания о графах, тем не менее естественно представляются именно как задачи оптимизации на графах.

Выделение задач дискретной многошаговой оптимизации в отдельный класс определяется их большой прикладной значимостью, а также общим подходом к их решению — методом динамического программирования. Хотя многие такие задачи могут быть представлены в виде задач оптимизации на графах, в большинстве случаев они не решаются традиционными «графовыми» алгоритмами. Однако все они решаются вышеупомянутым мощным универсальным методом динамического программирования.

Часть 1 содержит четыре главы. Глава 1 посвящена подробному определению и описанию используемых не только в части 1, но и во многих других главах объектов — ориентированных и неориентированных графов. В гл. 2 рассмотрены наиболее известные и важные задачи оптимизации на графах. В гл. 3 приводятся постановка и метод решения многошаговых задач дискретной оптимизации. В гл. 4 рассматривается линейное программирование — оптимизация линейных функций при линейных ограничениях.

Глава 1
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

В результате изучения главы студенты будут:

- ***знать*** формальные определения графов и орграфов, их виды, части, способы задания и основные свойства;
- ***уметь*** представлять содержательные прикладные задачи дискретного характера в терминах теории графов;
- ***владеть*** методами описания и представления графов и орграфов, а также алгоритмами нахождения их некоторых частей при малой размерности.

В главе вводятся в рассмотрение графы — объекты, позволяющие просто представлять, точно формулировать и эффективно решать многие прикладные задачи, возникающие при управлении разнообразными системами в менеджменте, экономике и других областях. Дается содержательное и формальное определения графа (как в ориентированном, так и неориентированном случае). Определяются базовые понятия и термины, связанные с графами. Терминология в основном совпадает с терминологией из книги [9]. Все понятия, связанные с взвешенными графами, т.е. с графами, вершинам, дугам или ребрам которых сопоставлены некоторые числа — стоимости, длины и т.д., будут рассмотрены в последующих главах.

1.1. Понятие и определения графа

Во многих случаях оказывается очень удобным и полезным рисовать на бумаге (доске, экране компьютера) точки, изображающие населенные пункты, агрегаты, людей, организации и т.д., и соединять эти точки линиями или стрелками, указывающими на связи между соответствующими объектами. Такими схемами хорошо представляются карты дорог, технологические схемы предприятий, диаграммы организаций, электрические цепи, сети коммуникаций, блок-схемы алгоритмов, генеалогические деревья и пр. Хотя такого рода схемы изучались достаточно давно (начиная с Эйлера), немецкий математик Д. Кениг был первым, кто предложил называть такие схемы «графами» и систематически изучать их свойства (в 1936 г.).

- ***Граф*** характеризует связи между объектами; условно эти объекты изображаются точками, а связи между ними — линиями, соединяющими соответствующие точки.

При этом положение точек, наклон и длина линий совершенно не имеют значения (в отличие, например, от изображений в геометрии); важно лишь то, какие именно пары точек соединены, а какие — нет. Для удобства будем обозначать вершины натуральными числами (вообще говоря, их можно обозначать любыми символами).

Пример 1.1. На рис. 1.1 приведен пример трех графов. На первый взгляд эти графы различны. Однако на самом деле во всех трех случаях изображен один и тот же граф. Действительно, во всех трех изображениях соединены между собой те же самые пары точек: {1, 2}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {4, 5}; никакие другие пары точек не соединены. ■

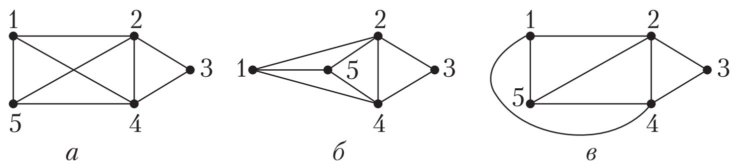


Рис. 1.1. **Неориентированный граф — разные представления**

В одних случаях при описании связей между объектами «направление» связи не имеет значения. Соответствующие точки в графе соединяются линией без стрелки (как на рис. 1.1); граф в этом случае называется ***неориентированным***. В других случаях важно не только то, что объекты связаны, но и то, как именно «направлена» эта связь. Соответствующие точки в графе соединяются линией со стрелкой; граф в этом случае называется ***ориентированным***. Ориентированные графы часто называются ***орграфами***. С помощью неориентированных графов удобно представлять, например, карты дорог (если они не являются односторонними); организационные структуры естественно описывать с помощью ориентированных графов.

Пример 1.2. Ориентированный граф (так называемая «сеть питания») показан на рис. 1.2. В нем направления дуг указывают, кто кого ест. Про такую сеть писал А. С. Пушкин:

Орел бьет сокола, а сокол бьет гусей;
Страшатся щуки крокодила;
От тигра гибнет волк, а кошка ест мышей.
Всегда имеет верх над слабостию сила!

Занумеруем вершины графа на рис. 1.2 так: лисы — 1; насекомые — 2; трава — 3; олени — 4; птицы — 5. Сеть питания с указанной нумерацией вершин показана на рис. 1.3. В графе соединены следующие пары точек (начало указано первым, конец — вторым): (1, 2), (1, 5), (2, 3), (4, 3), (5, 2), (4, 3). ■

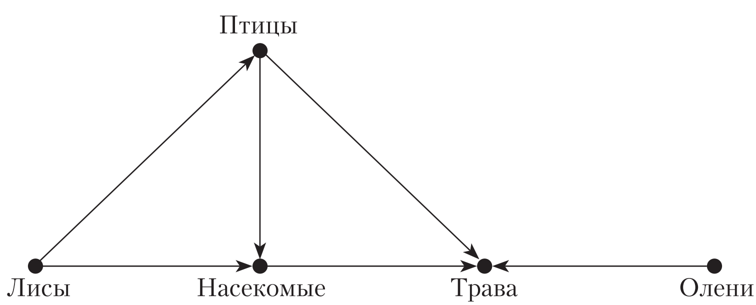


Рис. 1.2. **Ориентированный граф — сеть питания**

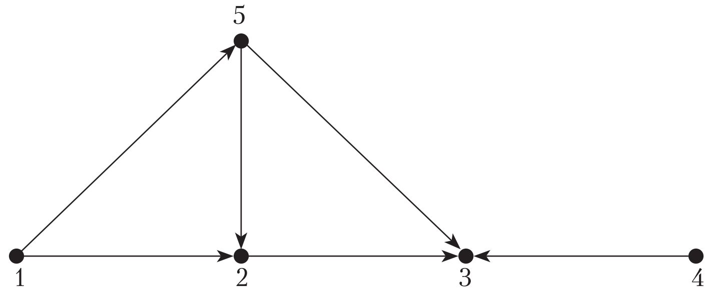


Рис. 1.3. **Сеть питания с занумерованными вершинами**

1.1.1. Формальное определение графов

Начнем с необходимых понятий. Пусть X — некоторое конечное множество. Мы будем рассматривать множества всех неупорядоченных и всех упорядоченных пар *различных* элементов X, обозначая первое из них через $E(X)$, а второе — через $A(X)$. Остановимся на этом подробнее.

Пример 1.3. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$. Тогда $E(X) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$; $A(X) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c\}, (b, d), (c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}$. Таким образом, $E(X)$ состоит из шести неупорядоченных пар, т.е. различных двухэлементных подмножеств множества X. $A(X)$ состоит из 12 различных упорядоченных пар, поскольку упорядоченные пары (a, b) и (b, a) не совпадают. Легко понять, что для любого конечного множества X

$$\left|E(X)\right| = \frac{N\cdot(N-1)}{2}, \left|A(X)\right| = N\cdot(N-1). \tag{1.1а}$$

Здесь и далее через $|Z|$ обозначено число элементов конечного множества Z, так что N равно числу элементов конечного множества X, а $\left|E(X)\right|$ и $\left|A(X)\right|$ равны числу элементов в конечных множествах $E(X)$ и $A(X)$.

Иногда рассматривают также упорядоченные пары вида (a, a) с совпадающими элементами; множество всех упорядоченных пар, включающих такие пары с совпадающими элементами, обозначим через $A^*(X)$. Множество, в которое наряду со всеми двухэлементными подмножествами множества X входят также все его одноэлементные подмножества, обозначим через $E^*(X)$. Для рассмотренного выше множества $X = \{a, b, c, d\}$ имеем $E^*(X) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$; $A^*(X) = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c\}, (b, d), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}$. Легко видеть, что

$$\left|E^*(X)\right| = \frac{N\cdot(N+1)}{2}, \left|A^*(X)\right| = N^2. \blacksquare \tag{1.1б}$$

Неориентированным графом G называется пара $\langle V, E\rangle$, где $E \subseteq E(V)$ (по поводу обозначения $E(V)$ см. пример 1.3). Элементы множества V называются ***вершинами*** графа G, элементы множества E — его ***ребрами***. Если двухэлементное множество $e = \{a, b\} \in E$ (т.е. e является ребром графа G), то при геометрическом изображении графа вершины a и b соединяются линией (неважно, прямой или кривой). Вершины a и b называются ***концами*** ребра e; говорят также, что вершины a и b ***соединены*** ребром e и что вершины a и b ***инцидентны*** ребру e. При необходимости явного указания на множества вершин и ребер будем пользоваться обозначением $G(V, E)$.

Число вершин, смежных некоторой вершине неориентированного графа, называется ***степенью*** данной вершины.

В графе, показанном на рис. 1.1, вершины 1 и 4 соединены ребром $e = \{1, 4\}$ — отрезками на рис. 1.1, *а*, 1.1, *б* и кривой на рис. 1.1, *в*. На всех трех изображениях одного и того же графа ребра, естественно, одни и те же: $E(V) = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$. Других ребер в данном графе нет.

Определение ориентированного графа (орграфа) аналогично. ***Ориентированным графом*** G называется пара $\langle V, A\rangle$, где $A \subseteq A(V)$ (по поводу обозначения $A(V)$ см. пример 1.3). Элементы множества V называются ***вершинами*** орграфа G, элементы множества A — его ***дугами***. Если упорядоченная пара $a = (x, y) \in A$ (т.е. a является дугой орграфа G), то при геометрическом изображении орграфа вершины x и y соединяются линией (неважно, прямой или кривой) со стрелкой, ведущей из вершины x в вершину y. Вершина x называется ***началом***, а вершина y — ***концом*** дуги $a = (x, y)$; говорят также, что дуга $a = (x, y)$ *ведет* из вершины x в вершину y или что дуга $a = (x, y)$ *выходит* из x и *входит* в y. Как и для неориентированных графов, вершины x и y называются ***инцидентными*** дуге $a = (x, y)$. Для орграфов также будем пользоваться обозначением $G(V, A)$.

В орграфе, показанном на рис. 1.3, из вершины 4 в вершину 3 ведет дуга $a = (4, 3)$, изображенная линией со стрелкой. В данном орграфе $A(V) = \{(1, 2\}, (1, 5\}, (2, 3\}, (4, 3\}, (5, 2\}, (5, 3\}\}$. Других дуг в рассматриваемом орграфе нет.

Как для неориентированных, так и для ориентированных графов определим дополнительный граф (орграф) $\overline{G}$. *Дополнительный граф* $\overline{G}(V, \overline{E})$ имеет то же самое множество вершин V, а множество его ребер $\overline{E} = E(V)\setminus E$. Иными словами, дополнительный граф $\overline{G}$ содержит все те и только те ребра, которые не входят в исходный граф G. Аналогично определяется и дополнительный (по отношению к исходному орграфу $G(V, A)$) новый орграф $\overline{G}(V, \overline{A})$, в котором $\overline{A} = A(V)\setminus A$.

Пример 1.4. Граф, дополнительный к графу G на рис. 1.1, показан на рис. 1.4. Поскольку в исходном графе число вершин $N = 5$, то в соответствии с (1) $|E(X)| = 10$. В исходном графе содержатся 8 ребер, откуда и следует, что в дополнительном графе содержатся $2 = 10 - 8$ ребра. По списку всех ребер, приведенному в примере 1.1, сразу можно видеть, что не хватает только ребер $\{1, 3\}$ и $\{3, 5\}$. Именно эти ребра и входят в дополнительный граф на рис. 1.4.

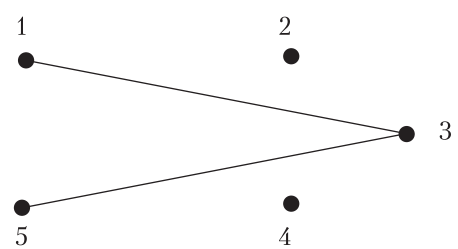
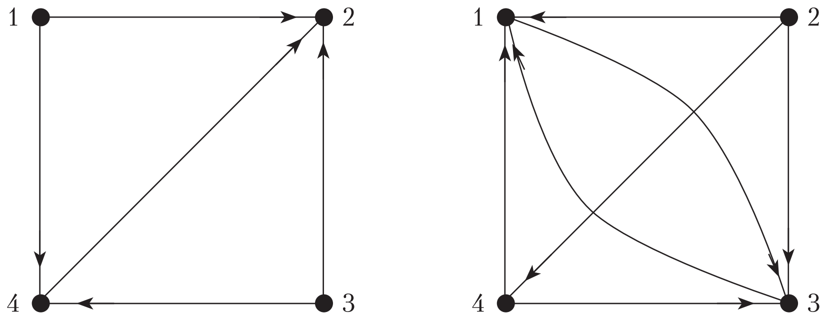


Рис. 1.4. **Дополнительный граф к графу на рис. 1.1**

Ориентированный граф и его дополнение показаны на рис. 1.5. Так как число вершин $N = 4$, то из формулы (1) получаем $|A(V)| = 12$. Поэтому суммарное число дуг в исходном и дополнительном орграфах равно 12, что и демонстрируется на рис. 1.5. ■



а *б*

Рис. 1.5. **Взаимнодополнительные графы**:
а — исходный орграф;
б — орграф, дополнительный к графу на *а*

Непосредственно из определения дополнительного графа (орграфа) следует, что дополнение к дополнению совпадает с исходным графом (орграфом). Формально: $\overline{\overline{G}} = G$.

1.2. Части графов

В этом параграфе рассматриваются некоторые наиболее важные с прикладной и теоретической точек зрения части графов и орграфов. Речь идет о специальных подмножествах вершин, ребер и дуг: внутренне и внешне устойчивых множествах вершин, ядрах, разнообразных видах маршрутов в графах и орграфах, компонентах связности, разрезах и подграфах.

1.2.1. Внутренне и внешне устойчивые множества вершин

Дадим определения сразу для неориентированного и ориентированного случая, учитывая, что эти определения очень похожи (отличия будем указывать в скобках).

- Две вершины, которые соединены ребром (дугой), т.е. служащие концами одного и того же ребра (дуги), называются ***смежными***.

В противном случае две вершины не смежны.

- Вершина, не смежная ни с одной другой вершиной графа (орграфа), называется ***изолированной***. Множество X вершин графа (орграфа) G, любые две из которых не смежны, называется ***внутренне устойчивым***, а максимально возможное число элементов внутренне устойчивого множества — ***числом внутренней устойчивости*** графа (орграфа) G (обозначается $\alpha(G)$).

Сразу поясним это не очень простое понятие. Прежде всего, любое множество вершин, состоящее только из одной вершины, является по определению внутренне устойчивым как в неориентированном, так и в ориентированном случае. Действительно, определение внутренней устойчивости множества вершин X можно переформулировать так: «Если любые две *разные* вершины множества X не смежны, то множество X называется внутренне устойчивым» или, пользуясь записью с кванторами:

$$(\forall a \in X)(\forall b \in X)[(a \neq b) \to (a \text{ не смежна с } b)]. \quad (1.2)$$

Но если множество X состоит из *одной* вершины, то посылка $a \neq b$ импликации (1.2) ***всегда*** ложна, поскольку a и b — две *разные* вершины из множества X. Напомним, что, по определению импликации, импликация с ложной посылкой всегда истинна «в силу ложности посылки». Но это и означает истинность импликации (1.2), что и означает внутреннюю устойчивость любого одноэлементного множества.

Утверждение 1.1. Любое подмножество внутренне устойчивого множества внутренне устойчиво.

Действительно, по определению, во внутренне устойчивом множестве никакие две вершины не соединены ребром. Значит, этим же свойством обладает и любое его подмножество. ■

- Внутренне устойчивое множество вершин называется ***максимальным по включению***, если оно не содержится ни в каком другом внутренне устойчивом множестве.

Утверждение 1.1 позволяет при поиске всех внутренне устойчивых множеств ограничиться поиском только максимальных по включению внутренне устойчивых множеств. Действительно, всякое внутренне устойчивое множество либо само является максимальным по включению, либо содержится в некотором максимальном по включению внутренне устойчивом множестве. (Заметим, что таких множеств может быть несколько.) Поэтому семейство всех максимальных по включению внутренне устойчивых множеств определяет все внутренне устойчивые множества: множество является внутренне устойчивым, если оно содержится хотя бы в одном максимальном по включению внутренне устойчивом множестве.

Пример 1.5. Проиллюстрируем понятия внутренней устойчивости множества вершин в неориентированном графе. Для этого рассмотрим граф, показанный на рис. 1.6, *а*. На рис. 1.6, *б* — 1.6, *е* показаны все максимальные по включению внутренне устойчивые множества в данном графе. На каждом из этих рисунков видно, что все выделенные большими кружками вершины не соединены непосредственно друг с другом ребрами. Ясно также, что при добавлении любой вершины все эти множества перестают быть внутренне устойчивыми — появляются ребра. Обратим внимание на то, что максимальные по включению внутренне устойчивые множества могут содержать различное число вершин — три на рис. 1.6, *б* — 1.6, *г* и два на рис. 1.6, *д* и 1.6, *е*.

Множество, показанное на рис. 1.6, *ж*, является внутренне устойчивым, но не максимальным по включению. Оно содержится в множестве, показанном на рис. 1.6, *б*. Наконец, множество, показанное на рис. 1.6, *з*, не является внутренне устойчивым. Входящие в него вершины 5 и 6 соединены ребром.

Поскольку максимальное число вершин во внутренне устойчивом множестве равно 3, то число внутренней устойчивости $\alpha(G) = 3$.

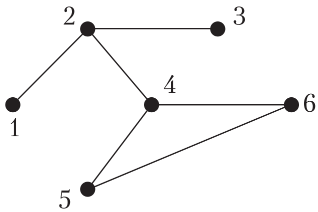


Рис. 1.6, а. **Исходный граф**

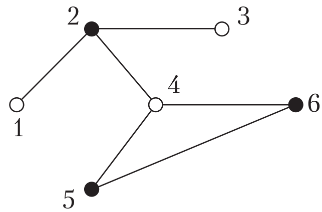


Рис. 1.6, б. **Максимальное по включению внутренне устойчивое множество {1, 3, 4}**

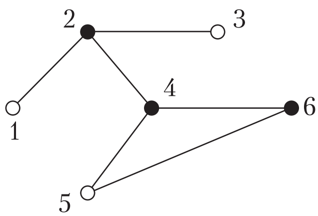


Рис. 1.6, в. **Максимальное по включению внутренне устойчивое множество {1, 3, 5}**

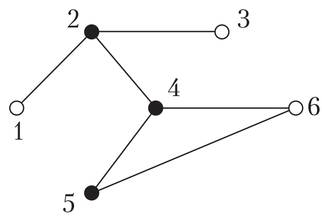


Рис. 1.6, г. **Максимальное по включению внутренне устойчивое множество {1, 3, 6}**

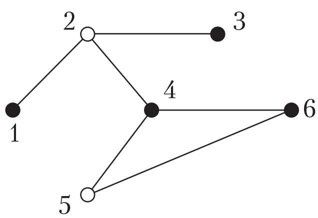


Рис. 1.6, д. **Максимальное по включению внутренне устойчивое множество {2, 5}**

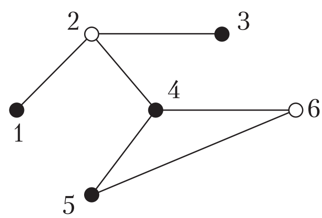


Рис. 1.6, е. **Максимальное по включению внутренне устойчивое множество {2, 6}**

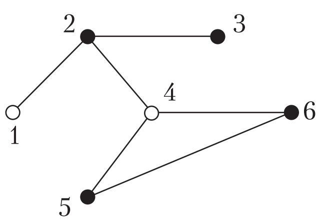


Рис. 1.6, ж. **Внутренне устойчивое множество {1, 6}, не максимальное по включению**

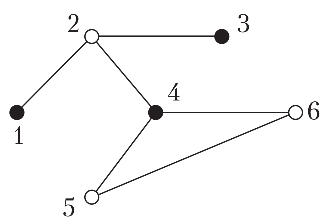


Рис. 1.6, з. **Множество вершин {2, 5, 6}, не являющееся внутренне устойчивым**

Можно проверить, что любое множество, содержащее четыре вершины, не будет внутренне устойчивым. Действительно, любое внутренне устойчивое множество не может содержать никаких двух вершин из подмножества {4, 5, 6}, так как они все попарно смежны (соединены ребрами). Значит, в него может входить не более одной вершины из множества {4, 5, 6}. Но так как в нем должно быть четыре вершины, а всего есть шесть вершин, то в него должны входить все вершины из множества {1, 2, 3}. А так как вершины 1 и 2 смежны, то такое множество не может быть внутренне устойчивым. В силу того же утверждения 1.1 бóльшие множества вершин также не могут быть внутренне устойчивыми. ■

В произвольном графе с небольшим числом вершин максимальные по включению внутренне устойчивые множества могут быть найдены простым перебором всех различных подмножеств, начиная с множества всех вершин. Однако наиболее простой и эффективный подход — внимательно посмотреть на граф собственными глазами (и подумать собственной головой). Конечно, в графах, содержащих порядка 15 вершин и более, такой просмотр практически не реален. Формальные алгоритмы решения данной задачи в силу своей сложности здесь не рассматриваются.

Введем дальнейшие понятия.

- Множество X вершин графа G называется ***внешне устойчивым***, если любая вершина из $V \backslash X$, т.е. вершина, не принадлежащая X, смежна хотя бы с одной вершиной из X (является *концом* некоторой дуги, *начало* которой принадлежит множеству вершин X, в ориентированном случае). Минимально возможное число элементов внешне устойчивого множества называется ***числом внешней устойчивости*** графа G (обозначается $\beta(G)$).

Обратим внимание на то, что связность вершин внутри множества X не оказывает никакого влияния на данное свойство. Это значит, что добавление или удаление любого ребра (дуги) между вершинами из X не повлияет ни на наличие свойства внешней устойчивости у множества X, ни на его отсутствие. Обратим внимание, что в определении не требуется, чтобы какая-нибудь вершина из X была бы смежной со *всеми* вершинами из $V \backslash X$. Достаточно, если любая вершина из $V \backslash X$ смежна хотя бы с какой-нибудь вершиной из X. Для разных «внешних» вершин (т.е. из $V \backslash X$) смежные с ними «внутренние» вершины (т.е. из X) могут (но не обязаны!) быть различными.

Заметим, что само множество всех вершин V является внешне устойчивым в силу ложности посылки. Действительно, при $X = V$ имеем $V \backslash X = \varnothing$, т.е. вершин, не принадлежащих X, просто не существует. Как и определение внутренне устойчивого множества, определение внешне устойчивого множества является импликацией:

$$(\forall a \in V \backslash X) \to (\exists b \in X)(a \text{ смежна с } b), \qquad (1.3)$$

которая всегда верна при ложной посылке $(\forall a \in V \backslash X)$.

Имеет место простое

Утверждение 1.2. Любое множество, содержащее внешне устойчивое множества вершин, также внешне устойчиво.

Действительно, пусть внешне устойчивое множество $X \subseteq Y$. Поэтому для всякой вершины $z \in V \backslash Y$ верно $z \in V \backslash X$. Так как X — внешне устойчивое множество, то, по определению, z смежна с некоторой вершиной $w \in X$ (является концом дуги с началом w). А в силу включения $X \subseteq Y$ имеем $w \in Y$. Таким образом, начав с произвольной вершины $z \in V \backslash Y$, установили, что она смежна с некоторой вершиной $w \in Y$ (является концом дуги с началом w), что, по определению, означает внешнюю устойчивость Y. ■

- Внешне устойчивое множество называется ***минимальным по включению***, если оно не содержит ни одного другого внешне устойчивого множества.

В силу утверждения 1.2, для нахождения всех внешне устойчивых множеств достаточно выявить только минимальные внешне устойчивые множества. Все остальные являются произвольными множествами, содержащими хотя бы одно минимальное по включению внешне устойчивое множество.

Проиллюстрируем теперь это понятие на том же графе рис. 1.6, *а*.

Пример 1.6. На рис. 1.7, *а* — 1.7, *е* показаны все минимальные по включению внешне устойчивые множества в данном графе. На каждом из этих рисунков видно, что любая вершина, показанная черным кружком (как в исходном графе) соединена хотя бы

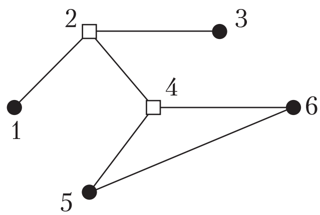


Рис. 1.7, а. **Минимальное по включению внешне устойчивое множество {2, 4}**

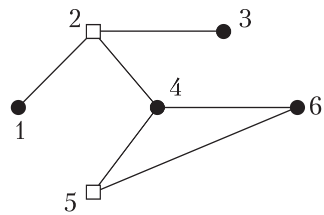


Рис. 1.7, б. **Минимальное по включению внешне устойчивое множество {2, 5}**

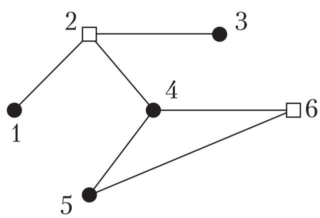


Рис. 1.7, в. **Минимальное по включению внешне устойчивое множество {2, 6}**

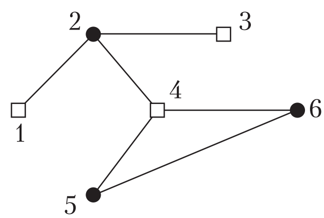


Рис. 1.7, г. **Минимальное по включению внешне устойчивое множество {1, 3, 4}**

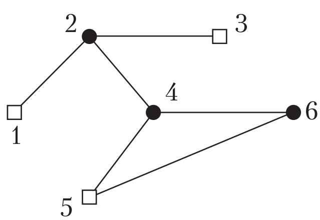


Рис. 1.7, д. **Минимальное по включению внешне устойчивое множество {1, 3, 5}**

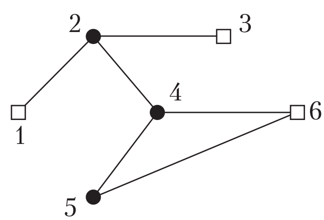


Рис. 1.7, е. **Минимальное по включению внешне устойчивое множество {1, 3, 6}**

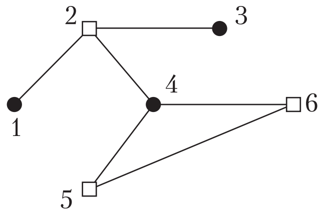


Рис. 1.7, ж. **Внешне устойчивое множество {2, 5, 6}, не минимальное по включению**

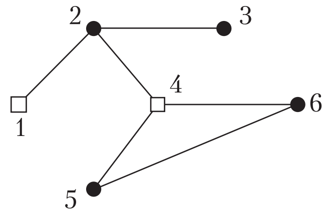


Рис. 1.7, з. **Множество вершин {1, 4}, не являющееся внешне устойчивым**

с одной вершиной из внешне устойчивого множества, выделенных квадратами. Ясно также, что при удалении любой вершины из внешне устойчивого множества все эти множества перестают быть внешне устойчивыми — появляются вершины, не соединенные ни с одной из оставшихся вершин. Обратим внимание на то, что минимальные по включению внешне устойчивые множества могут содержать различное число вершин — две на рис. 1.7, *а* — 1.7, *в* и три на рис. 1.7, *г* — 1.7, *е*.

Множество, показанное на рис. 1.7, *ж*, является внешне устойчивым, но не минимальным по включению. Оно содержит множества, показанные на рис. 1.7, *б* и 1.7, *в*. Наконец, множество, показанное на рис. 1.7, *з*, не является внешне устойчивым. Вершина 3 не соединена ребром ни с вершиной 1, ни с вершиной 4, что противоречит определению внешне устойчивого множества.

Поскольку минимальное число вершин во внешне устойчивом множестве равно 2, то число внешней устойчивости $\beta(G) = 2$.

Видно непосредственно на рисунке, что любое множество, содержащее одну вершину, не будет внешне устойчивым — просто потому, что в исходном графе нет ни одной вершины, соединенной со всеми остальными. ■

Как и для внутренне устойчивых множеств, формальные алгоритмы нахождения всех (или хотя бы одного) внешне устойчивого множества в силу своей сложности здесь не рассматриваются.

Следующее важное понятие — понятие ядра.

- Множество X вершин графа (орграфа) G, одновременно внутренне и внешне устойчивое, называется ***ядром*** графа (орграфа) G.

Из определений внутренней и внешней устойчивости непосредственно следует, что:

— любая изолированная вершина графа может быть добавлена к любому не содержащему ее внутренне устойчивому множеству и это расширенное множество также будет внутренне устойчивым;

— любое внешне устойчивое множество обязано содержать любую изолированную вершину.

Из утверждений 1.1 и 1.2 непосредственно следует

Утверждение 1.3. Множество вершин Z является ядром графа (орграфа) G тогда и только тогда, когда существуют минимальное по включению внешне устойчивое множество X и максимальное по включению внутренне устойчивое множество Y, такие, что

$$X \subseteq Z \subseteq Y. \qquad (1.4)$$ ■

Если *уже известны* все минимальные по включению внешне устойчивые множества $X_1, ..., X_s$ и все максимальные по включению внутренне устойчивые множества $Y_1, ..., Y_t$, то утверждение 1.3 позволяет предложить следующий

Алгоритм нахождения всех ядер графа (орграфа)

1. Находим все пары индексов $\langle i, j\rangle$, такие, что

$$X_i \subseteq Y_j. \qquad (1.5)$$

2. Для каждой такой пары индексов находим все множества Z, удовлетворяющие двойному включению

$$X_i \subseteq Z \subseteq Y_j. \qquad (1.6)$$

3. Из всех множеств Z, найденных на шаге 2, выделяем все различные множества. Они и являются всеми ядрами графа. ■

Алгоритм применим как в неориентрованном, так и в ориентированном случае. Если включения (1.5) ни при каких i, j не выполняются, то это означает, что в данном случае ядра не существуют. Заметим также, что сами списки $X_1, ..., X_s$ и $Y_1, ..., Y_t$ никогда не являются пустыми, поскольку в любом графе и орграфе любое одноэлементное множество является внутренне устойчивым, а множество всех вершин — внешне устойчивым в силу ложности посылки.

Пример 1.7. Рассмотрим снова граф на рис. 1.6, *а*. Максимальные по включению внутренне устойчивые множества — множества $Y_1 = \{1, 3, 4\}$, $Y_2 = \{1, 3, 5\}$, $Y_3 = \{1, 3, 6\}$, $Y_4 = \{2, 5\}$, $Y_5 = \{2, 6\}$ (см. рис. 1.6). Минимальные по включению внешне устойчивые множества — множества $X_1 = \{2, 4\}$, $X_2 = \{2, 5\}$, $X_3 = \{2, 6\}$, $X_4 = \{1, 3, 4\}$, $X_5 = \{1, 3, 5\}$, $X_6 = \{1, 3, 6\}$ (см. рис. 1.7). По алгоритму нахождения ядер рассмотрим все пары множеств $\langle X_i, Y_j \rangle$, удовлетворяющие включению (1.6). Таковыми являются следующие пары: $\langle X_2, Y_4 \rangle$, $\langle X_3, Y_5 \rangle$, $\langle X_4, Y_1 \rangle$, $\langle X_5, Y_2 \rangle$, $\langle X_6, Y_3 \rangle$. Для всех этих пяти пар включения являются равенствами, т.е. $X_i = Y_j$. Поэтому расположенные «между ними» (см. (1.6)) ядра Z совпадают с $X_i = Y_j$. В данном случае получаем список ядер: $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$ (шаг 3 не потребовался, поскольку все эти множества различны). Таким образом, в данном случае множество ядер совпадает с множеством максимальных по включению внутренне устойчивых множеств. Такое совпадение не является общим правилом, однако важная связь между этими множествами в случае неориентированных графов действительно присутствует. Эти вопросы будут исследованы ниже. ■

Пример 1.8. Рассмотрим орграф на рис. 1.3. В этом орграфе внутренне устойчивыми множествами являются все одноэлементные множества $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ и двухэлементные множества $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{4, 5\}$. Других внутренне устойчивых множеств в данном орграфе нет. Максимальными по включению являются только эти двухэлементные множества.

Одноэлементных внешне устойчивых множеств в данном случае нет (так как нет ни одной вершины, откуда дуги ведут во все остальные). Единственным двухэлементным внешне устойчивым множеством вершин является $\{1, 4\}$ (так как дуги $(1, 5)$, $(1, 2)$ и $(4, 3)$ ведут из множества $\{1, 4\}$ в вершины 5, 2 и 3, т.е. во все остальные вершины, в соответствии с определением). Поэтому множество $\{1, 4\}$ является минимальным по включению внешне устойчивым множеством. Далее, пусть X — любое внешне устойчивое множество в данном орграфе. Предположим, что вершина 1 не входит в X. Тогда, по определению для ориентированных графов, должна быть вершина в X, из которой выходит дуга с концом в вершине 1. Но поскольку в вершину 1 ни одна дуга не входит (см. рис. 1.3), то сделанное предположение неверно. Поэтому вершина 1 входит в любое внешне устойчивое множество X. Принадлежность вершины 4 любому внешне устойчивому множеству вершин устанавливается точно так же. Таким образом, множество вершин $\{1, 4\}$ входит в *любое* внешне устойчивое множество. Следовательно, $\{1, 4\}$ является *единственным* минимальным по включению внешне устойчивым множеством вершин.

Сравнивая по алгоритму список максимальных по включению внутренне устойчивых множеств $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{4, 5\}$ и список минимальных по включению внешне устойчивых множеств вершин, состоящий из единственного множества $\{1, 4\}$, сразу получаем, что единственным ядром является множество вершин $\{1, 4\}$. ■

Напомним, что определения внутренне устойчивого множества вершин в неориентированном и ориентированном случаях совпадают. Совпадают и определения ядра. Отличаются только определения внешне устойчивого множества: в ориентированном случае требуется, чтобы дуга, соединяющая множества X и $V \backslash X$, имела направление от X к $V \backslash X$. Однако это различие признается весьма существенным. В неориентированном графе ядро всегда существует, в то время как в ориентированном графе ядра может не быть. Остановимся на этом подробнее.

Пример 1.9. Рассмотрим простой орграф, показанный на рис. 1.8. Единственными внутренне устойчивыми множествами вершин являются три одноэлементных множества $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Они же, естественно, максимальны по включению (так как бóльших внутренне устойчивых множеств нет).

Найдем все минимальные по включению внешне устойчивые множества вершин. Как уже упоминалось выше, множество всех вершин является внешне устойчивым. Далее, двухэлементное множество $\{1,2\}$ является внешне устойчивым, поскольку есть дуга $(2, 3)$ в единственную не входящую в $\{1, 2\}$ вершину 3. Точно так же внешне устойчивыми множествами являются $\{2, 3\}$ и $\{1, 3\}$. Далее одноэлементное множество $\{1\}$ не является внешне устойчивым, потому что в орграфе нет дуги $(1, 3)$, что противоречит определению. Аналогично одноэлементные множества $\{2\}$ и $\{3\}$ также не являются внешне устойчивыми.

Таким образом, имеется список минимальных по включению внешне устойчивых множеств $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$ и список максимальных по включению внутренне устойчивых множеств $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Условия (5) $X_i \subseteq Y_j$ не выполняются уже потому, что все множества X_i состоят из двух элементов, а все множества Y_j — из одного элемента. В силу утверждения 1.3 в данном случае ядра отсутствуют, так как включения (3) не могут иметь места. ■

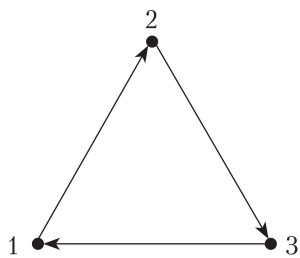


Рис. 1.8. **Орграф, не имеющий ядер**

Примеры 1.8 и 1.9 показывают, что в ориентированных графах ядра могут быть, а могут и не быть. Возможно ли отсутствие ядер в неориентированных графах? Полный ответ на этот вопрос дает

Утверждение 1.4. В неориентированном графе любое максимальное по включению внутренне устойчивое множество является и внешне устойчивым, т.е. служит ядром.

Действительно, предположим, что максимальное по включению внутренне устойчивое множество вершин A не является внешне устойчивым. По определению, это означает, что существует вершина $y \in V \backslash A$, не смежная ни с одной вершиной $x \in A$. Но тогда множество $A \cup \{y\}$ не содержит ни одного ребра, поскольку без вершины y, т.е. в самом множестве A, ребер нет по определению внутренней устойчивости, а добавление y также не добавило ребер по построению. Это означает, что множество $A \cup \{y\}$ внутренне устойчиво. Но тогда множество A, оставаясь внутренне устойчивым, не будет максимальным по включению, поскольку содержится в бóльшем внутренне устойчивом множестве $A \cup \{y\}$, что противоречит предположению о максимальности A. ■

Утверждение 1.4 дает *гарантию* существования ядер в *любых* неориентированных графах. Значительно более сложный вопрос об условиях существования и единственности ядер в ориентированных графах здесь не рассматривается. Некоторые другие вопросы, связанные с ядрами в ориентированных графах, будут рассмотрены в пункте 12.3.3.3.

Важным понятием представляется тесно связанное с понятием внутренне устойчивого множества вершин в некотором смысле противоположное ему понятие клики графа (орграфа).

- ***Кликой*** называется любое подмножество X множества вершин V графа (орграфа), такое, что любые две вершины из этого множества смежны между собой, т.е. являются концами одного и того же ребра дуги.

Связь между понятиями внутренне устойчивого множества и клики устанавливает следующее

Утверждение 1.5. 1. Множество X вершин графа (орграфа) G внутренне устойчиво тогда и только тогда, когда то же самое множество вершин является кликой в дополнительном графе (орграфе) $\overline{G}$. 2. Множество X вершин графа (орграфа) G является кликой тогда и только тогда, когда то же самое множество вершин внутренне устойчиво в дополнительном графе (орграфе) $\overline{G}$.

По определению дополнительного графа (орграфа), две вершины соединены ребром (дугой) тогда и только тогда, когда эти же вершины не смежны в исходном графе (орграфе). Отсюда сразу следует первая часть утверждения 1.5. Доказательство второй части аналогично: две вершины в дополнительном графе (орграфе) не смежны тогда и только тогда, когда эти же вершины соединены ребром (дугой) в исходном графе. ■

1.2.1.1. Возможные применения

Здесь рассматриваются некоторые реальные ситуации, связанные с внешне устойчивыми множествами.

Пример 1.10. ***Ремонтные базы.*** Пусть в городах $a_1, ..., a_n$ имеются предприятия, и некоторые из городов связаны между собой дорогами (два города, связанных дорогой, не проходящей через другие города, назовем соседними). Для обслуживания предприятий необходимо в некоторых городах организовать ремонтные базы. Каково минимально возможное число баз, если потребовать, что для любого предприятия найдется база, расположенная либо в том же городе, либо в одном из соседних?

Определим граф с вершинами $a_1, ..., a_n$. Две вершины соединены ребром, если соответствующие города соседние. Легко понять, что множество городов, в которых требуется разместить ремонтные базы, является внешне устойчивым множеством, поскольку по условию для каждого города, в котором нет базы, есть соседний город, в котором база имеется. Поэтому исходная задача состоит в поиске минимального внешне устойчивого множества. ■

Пример 1.11. ***Ядро орграфа как множество лучших альтернатив.*** Пусть вершины орграфа G соответствуют альтернативам 1, 2, ..., N и альтернатива i предпочтительнее альтернативы j, если есть дуга с началом в i и концом в j. Естественно за множество лучших альтернатив принять ядро в данном графе. Действительно, по определению ядра входящие в него вершины не соединены дугами. Поэтому все эти альтернативы несравнимы между собой. Кроме того, для всякой альтернативы, не вошедшей в ядро, найдется превосходящая ее альтернатива из ядра.

Если имеется несколько ядер или их совсем нет, то ситуация становится более сложной. Некоторые рекомендации обсуждаются в гл. 12. ■

1.2.2. Маршруты

Маршруты в графах (орграфах) служат одним из наиболее наглядных и естественных понятий, поскольку сами графы и орграфы представляют собой наглядные модели очень многих повсеместно присутствующих ситуаций. В этом подпараграфе даются самые общие представления о маршрутах. Как и в ранее, будем давать определения сразу для неориентированного и ориентированного случая, указывая отличия в скобках (там, где это возможно).

Наиболее общим понятием, относящимся к рассматриваемым здесь частям графов, является понятие маршрута.

- ***Маршрутом*** называется последовательность $\mu = \langle v_0, v_1, ..., v_{k-1}, v_k \rangle$ вершин графа (орграфа), такая, что две вершины v_i и v_{i+1} ($i = 0, 1, ..., k - 1$) являются концами некоторого ребра (дуги).

Число k называется ***длиной маршрута***. Оно равно числу ребер (дуг), входящих в данный маршрут; число входящих в него вершин на единицу больше. Подчеркнем, что в определении маршрута не предполагается, что все входящие в него вершины и ребра (дуги) были бы различными. Вершина v_0 называется ***началом маршрута*** μ, а вершина v_k — его ***концом***.

- Маршрут, в котором начало и конец совпадают, называется ***циклическим***.

Маршрут $\mu^{-1} = \langle v_k, v_{k-1}, ..., v_1, v_0 \rangle$ называется маршрутом, *обратным* маршруту μ. Наконец (только для орграфов), в маршруте μ дуга вида (v_i, v_{i+1}) называется ***прямой дугой*** маршрута, а дуга вида (v_{i+1}, v_i) — его *обратной дугой*. Маршрут ν *содержится* в *маршруте* μ (обозначается $\nu \le \mu$), если его можно получить из маршрута μ вычеркиванием части вершин.

Следующие определения выделяют маршруты, обладающие некоторыми специальными свойствами.

- ***Путем*** в неориентированном графе называется любой маршрут. ***Орпутем*** в орграфе называется маршрут, все дуги которого прямые (см. определение прямой дуги в предыдущем абзаце). ***Цепью*** (***орцепью***) в графе (орграфе) называется путь (орпуть), все ребра (дуги) которого различны. ***Простой цепью*** (***орцепью***) называется цепь (орцепь), в которой все вершины различны. Путь (орпуть), в котором начало и конец совпадают, называется ***циклическим путем*** (***орпутем***). Циклический путь (орпуть), являющийся цепью (орцепью), называется ***циклом*** (***орциклом***). Цикл (орцикл), в котором все вершины, кроме начала и конца, различны и не совпадают с началом, называется ***простым циклом*** (***орциклом***).

Приведем примеры, иллюстрирующие и разъясняющие введенные понятия.

Пример 1.12. В графе на рис. 1.1 последовательность $\mu = \langle 1, 2, 4, 1, 5, 4, 2, 3 \rangle$ является нециклическим маршрутом и путем, но не является цепью, поскольку ребро $\{2, 4\}$ встречается в нем два раза. Последовательность $\nu = \langle 1, 2, 4, 1, 5, 2, 3 \rangle$ является цепью, но не является простой цепью, поскольку вершины 1, 2 и 4 встречаются в ней более одного раза. Наконец, последовательность $\lambda = \langle 1, 2, 4, 5 \rangle$ является простой цепью, поскольку все вершины входят в нее по одному разу. Обратим внимание на включения $\lambda \le \nu \le \mu$. ■

Пример 1.13. В графе на рис. 1.6, *а* последовательность $\mu = \langle 1, 2, 4, 5, 6, 4, 2, 1 \rangle$ является циклическим маршрутом, но не является циклом, так как ребра $\{1, 2\}$ и $\{2, 4\}$ встречаются в нем по два раза. Последовательность $\nu = \langle 4, 5, 6, 4 \rangle$ по определению является простым циклом, причем $\nu \le \mu$. Обратим внимание на тот факт, что циклов, не являющихся простыми циклами, в рассматриваемом графе нет. ■

Пример 1.14. В графе на рис. 1.9 последовательность $\mu = \langle 1, 2, 4, 5, 4, 2, 1 \rangle$ является циклическим маршрутом, но ни одного цикла (и, следовательно, простого цикла) в данном графе нет.

Графы, не содержащие циклов, называются деревьями. Они рассматриваются в подпараграфе 1.4.1 настоящей главы. ■

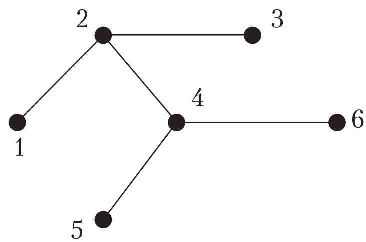


Рис. 1.9. **Граф, не содержащий циклов**

Пример 1.15. В орграфе на рис. 1.3 последовательность $\mu = \langle 1, 5, 2, 3, 4 \rangle$ является маршрутом, но не является орпутем, так как дуга $(4, 3)$ — обратная дуга этого маршрута. Однако последовательность $\nu = \langle 1, 5, 2, 3 \rangle$ $(\nu \le \mu)$ является маршрутом и орпутем, поскольку все дуги маршрута ν являются прямыми. ■

Пример 1.16. В орграфе на рис. 1.5, *а* последовательность $\mu = \langle 1, 2, 3, 4, 1 \rangle$ является циклическим маршрутом, но не является циклическим орпутем, так как дуги $(3, 2)$ и $(1, 4)$ — обратные дуги данного маршрута. Легко видеть, что в этом графе циклические орпути отсутствуют. В орграфе на рис. 1.5, *б* последовательность $\mu = \langle 1, 2, 3, 4, 1 \rangle$ является циклическим маршрутом, но не является циклическим орпутем, так как дуги $(2, 1)$ и $(4, 3)$ — обратные дуги этого маршрута. Однако входящий в циклический маршрут $\mu = \langle 1, 2, 3, 4, 1 \rangle$ маршрут $\nu = \langle 1, 3, 1 \rangle$ является циклом, более того — простым. ■

Несмотря на кажущийся беспорядок и отсутствие связей между рассмотренными в примерах 1.12—1.16 видами маршрутов, все же имеют место достаточно общие утверждения относительно таких связей. Сформулируем их по отдельности для графов и орграфов.

Утверждение 1.6а. Пусть μ — произвольный нециклический маршрут в графе G. Тогда существует маршрут ν, такой, что:

— маршрут ν содержится в маршруте μ;

— начало и конец ν совпадают с началом и концом μ;
— маршрут ν является простой цепью. ■

Утверждение 1.6б. В произвольном цикле в графе G содержится хотя бы один простой цикл. ■

Заметим, что условие существования простого цикла — наличие цикла. Наличия циклического маршрута недостаточно, что демонстрируется в примере 1.16.

Утверждение 1.6в. Пусть μ — произвольный орпуть в орграфе G. Тогда существует простой орпуть ν, такой, что:

— орпуть ν содержится в орпути μ;
— начало и конец ν совпадают с началом и концом μ;
— орпуть ν является простой орцепью. ■

Утверждение 1.6г. В произвольном орцикле в орграфе G содержится хотя бы хотя бы один простой орцикл. ■

1.2.3. Компоненты связности и разрезы

Введем необходимые понятия и определения.

- Две различные вершины графа (орграфа) называются ***связанными***, если существует маршрут, концами которого являются эти вершины.

- Максимальное по включению подмножество вершин графа (орграфа), любые две из которых являются связанными, называется ***компонентой связности*** данного графа (орграфа) или просто его *компонентой*.

Изолированная вершина графа (орграфа), т.е. вершина, не смежная ни одной другой вершине, является компонентой связности по определению (в силу ложности посылки), поскольку в этом подмножестве нет двух разных вершин.

- Граф (орграф), множество всех вершин которого является компонентой связности, называется ***связным***.

Все рассмотренные выше графы, кроме графа на рис. 1.4, состояли из одной компоненты связности. В указанном графе есть три компоненты связности, из которых две — изолированные вершины.

Множество ребер (дуг) называется *разрезом графа* (*орграфа*), если:

- удаление этих ребер (дуг) из графа (орграфа) увеличивает число компонент связности;
- ни одно подмножество этого множества данным свойством не обладает.

Важное свойство разрезов выражает следующее почти очевидное

Утверждение 1.7. Пересечение любого разреза графа (орграфа) с любым циклом (орциклом) состоит из четного числа ребер (дуг). ■

Заметим, что при замене цикла (орцикла) на циклический маршрут утверждение 1.7 становится неверным. Циклический маршрут может пройти (в любом направлении) по одному и тому же ребру (одной и той же дуге) многократно.

Конечно, то же самое верно и для частных видов циклов (орциклов): простых циклов (орциклов).

- Разрез, состоящий из одного ребра, называется ***перешейком***.

В силу утверждения 1.7 ни один цикл (орцикл) через перешеек проходить не может (а циклический маршрут может).

Укажем на возникающую в данной терминологии важную прикладную задачу декомпозиции: удалить по возможности небольшое число ребер из заданного графа так, чтобы оставшийся граф состоял из заданного числа компонент связности, не очень различающихся по числу вершин. Одной из многих содержательных интерпретаций является следующая: как разделить коллектив сотрудников на несколько групп для выполнения некоторого проекта так, чтобы в процессе работы требовалось как можно меньшее взаимодействие между сотрудниками из разных групп? Такая организация работы, как правило, признается более эффективной, поскольку работа отдельных групп проще организуется и контролируется. Конечно, задача декомпозиции в таком виде не является формально поставленной. Однако ее разнообразные формализации и многочисленные алгоритмы решения соответствующих формальных задач вызывают значительный интерес.

Для ориентированных графов есть свои специальные понятия, отличающиеся от рассмотренных выше. Остановимся на этом подробнее. Вершина x ***достижима*** из вершины y, если в орграфе G существует орпуть с началом y и концом x.

- Максимальное по включению подмножество вершин орграфа, любые две из которых достижимы друг из друга, называется ***сильной компонентой связности*** данного графа (орграфа) или просто его сильной компонентой.

Имеет место

Утверждение 1.8. Любая сильная компонента связности содержится в некоторой компоненте связности.

Предположим, что это не так. Тогда есть две вершины, которые принадлежат одной и той же сильной компоненте связности и разным компонентам. Это значит, что между ними нет ни одного маршрута. Но тогда нет и орпути, который по определению также является маршрутом. Поэтому ни одна из этих двух вершин не достижима из другой. Значит, они не могут принадлежать одной и той же сильной компоненте связности, что противоречит предположению. ■

Столь же очевидно и следующее

Утверждение 1.9. Любой орцикл содержится в некоторой сильной компоненте связности.

Это следует из того, что все вершины орцикла достижимы друг из друга. ■

В заключение приведем примеры, иллюстрирующие введенные в нем понятия.

Пример 1.17. Рассмотрим орграф, показанный на рис. 1.10. В данном орграфе есть три компоненты связности: {1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8, 9, 10}, {11}. Компонента {1, 2, 3, 4} является сильной компонентой связности, поскольку любая из этих вершин достижима из любой другой. Компонента {11}, как всякая изолированная вершина, является и сильной компонентой. Компонента {5, 6, 7, 8, 9, 10} не является сильной компонентой, так как никакая вершина не достижима из вершины 7. Но множество {5, 6, 8, 9, 10} является сильной компонентой, поскольку любая вершина достижима из любой другой. Например, 6 достижима из 8, так как есть орпуть $8 \to 5 \to 9 \to 10 \to 6$. Заметим, что множество {7}, состоящее из одной вершины, также является сильной компонентой, поскольку не содержится ни в одной другой сильной компоненте. Напомним, что в определении говорится о максимальных по включению множествах. Поэтому множества {5}, {6}, {8}, {9}, {10} сильными компонентами не являются, так как все они содержатся в сильной компоненте {5, 6, 8, 9, 10}. ■

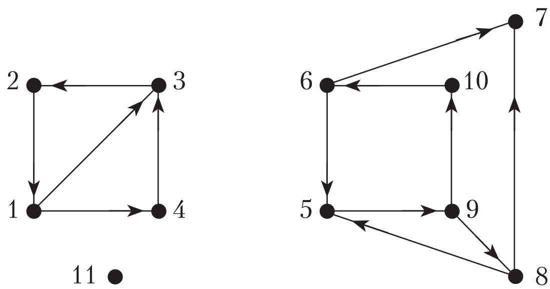


Рис. 1.10. **Компоненты и сильные компоненты**

Пример 1.18. В графе, показанном на рис. 1.11, 300 вершин. Он состоит из двух компонент связности. Попробуйте найти их! ■

1.2.4. Частичные графы

Пусть $G(V, E)$ — граф с множеством вершин V и множеством ребер E, $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$. Напомним, что E (и, следовательно, его подмножество E_1) представляет собой некоторое множество двухэлементных подмножеств V. Предположим, что объединение всех подмножеств из E_1 *содержится* в V_1. Тогда можно определить граф $G(V_1, E_1)$ с множеством вершин V_1 и множеством ребер E_1.

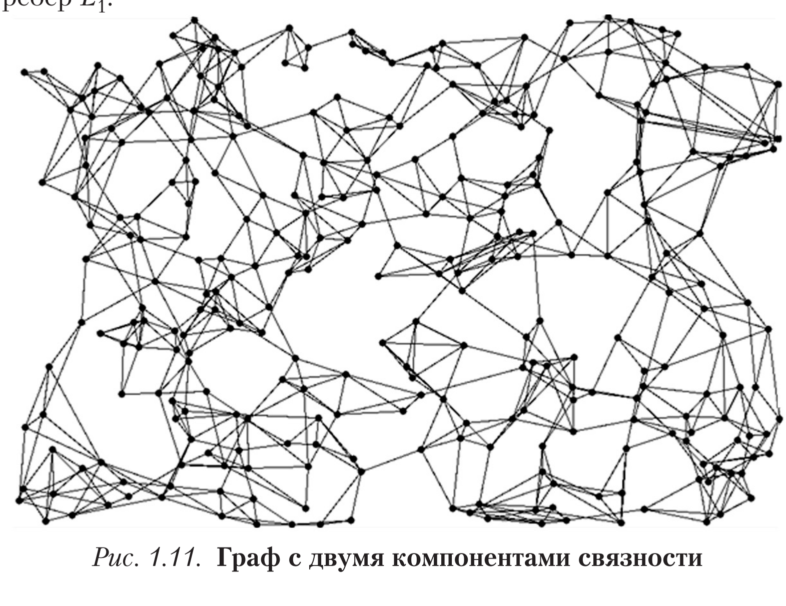


Рис. 1.11. **Граф с двумя компонентами связности**

Действительно, концы x и y любого ребра $\{x, y\}$ по предположению содержатся в V_1 и, следовательно, никаких «лишних» концов у всех ребер из E_1 не будет. Совершенно аналогично определяется и орграф $G(V_1, A_1)$. Следует предполагать только, что начало x и конец y любой дуги (x, y) из A_1 принадлежат подмножеству V_1.

Построенный указанным образом граф $G(V_1, E_1)$ (орграф $G(V_1, A_1)$) называется ***частичным графом*** (***орграфом***), ***порожденным*** парой множеств (V_1, E_1) $((V_1, A_1))$.

- Если множество E_1 состоит из *всех* ребер (дуг) с концами в V_1, то соответствующий частичный граф обозначается через $G(V_1)$ и называется ***подграфом*** (***подорграфом***), порожденным множеством вершин V_1.

Нетрудно видеть, что введенные в подпараграфе 1.2.3 компоненты связности фактически определяют подграф, порожденный соответствующим множеством вершин. Наконец, если $V_1 = V$, то в качестве E_1 (A_1) можно взять любое подмножество $E(A)$. Полученный частичный граф (орграф) называется ***субграфом*** (***суборграфом***), порожденным множеством ребер E_1 (дуг A_1). Он обозначается через $G(E_1)$ $(G(A_1))$.

Проиллюстрируем введенные понятия.

Пример 1.19. Рассмотрим граф на рис. 1.1. Положим $V_1 = \{1, 2, 4, 5\}$, $E_1 = \{\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}\}$. Частичный граф $G(V_1, E_1)$, порожденный указанными V_1 и E_1, показан на рис. 1.12, *а*; подграф $G(V_1)$, порожденный множеством вершин V_1, — на рис. 1.12, *б*; субграф $G(E_1)$, порожденный множеством ребер E_1, — на рис. 1.12, *в*.

Пример 1.20. Рассмотрим орграф на рис. 1.5, *а*. Положим $V_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_1 = \{(2, 1), (1, 3)\}$. Частичный орграф $G(V_1, A_1)$, порожденный указанными V_1 и A_1, показан на рис. 1.13, *а*; подорграф $G(V_1)$, порожденный множеством вершин V_1, — на рис. 1.13, *б*; суборграф $G(A_1)$, порожденный множеством ребер A_1, — на рис. 1.13, *в*.

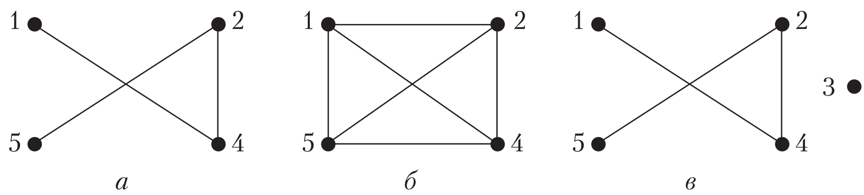


Рис. 1.12. **Частичные графы и их типы**:
а — частичный; *б* — подграф; *в* — субграф

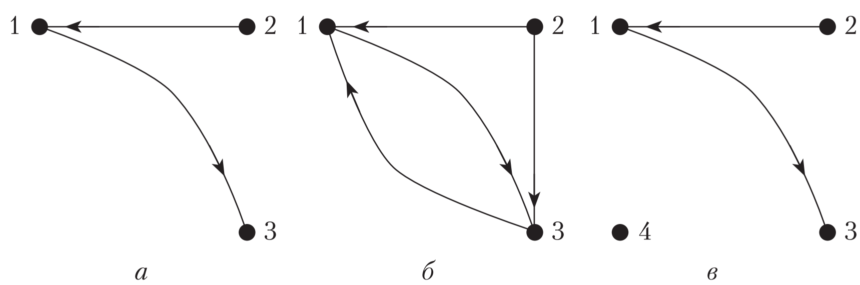


Рис. 1.13. **Частичные орграфы и их примеры**:
а — частичный; *б* — подорграф; *в* — суборграф

1.3. Задание графов

Когда речь заходит о каких бы то ни было алгоритмах, первым — и часто определяющим — вопросом является вопрос о формальном представлении рассматриваемых объектов или, как часто говорят, о выборе соответствующей структуры данных. В параграфе 1.1 описано формальное представление неориентированных графов в виде пары $\langle V, E\rangle$, а ориентированных графов — в виде пары $\langle V, A\rangle$, где $V = \{1, 2, ..., n\}$ — множество вершин графа (орграфа), а E и A — множества неупорядоченных и упорядоченных пар различных элементов множества вершин V. Однако для разработки и анализа алгоритмов нужны другие, гораздо более приспособленные для этих целей представления графов и орграфов. Такие представления и рассматриваются в настоящем параграфе.

1.3.1. Матрицы графов

Значительную часть информации относительно графов и орграфов можно представить в удобной форме, используя соответствующие им матрицы.

Матрицей смежности графа $G(V, E)$, число вершин которого равно N, называется квадратная матрица $A = (a_{ij})$ размера $N \times N$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ смежны,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (1.7а)$$

Матрицей смежности орграфа $G(V, A)$, число вершин которого равно N, называется квадратная матрица $A = (a_{ij})$ размера $N \times N$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если дуга выходит из вершины } i \\ & \text{и входит в вершину } j, \\ 1, & \text{если дуга выходит из вершины } j \\ & \text{и входит в вершину } i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (1.7б)$$

Таким образом, матрица смежности для графов является симметричной ($a_{ij} = a_{ji}$), а матрица смежности для орграфов — кососимметричной ($a_{ij} = -a_{ji}$).

Матрицей инцидентности графа $G(V, E)$, число вершин которого равно N, а число ребер равно m, называется прямоугольная матрица $R = (r_{ij})$ размера $N \times m$, где

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } i \text{ инцидентна ребру } j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (1.8а)$$

Матрицей инцидентности орграфа $G(V, A)$, число вершин которого равно N, а число дуг равно m, называется прямоугольная матрица $R = (r_{ij})$ размера $N \times m$, где

$$r_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если дуга } j \text{ выходит из вершины } i, \\ 1, & \text{если дуга } j \text{ входит в вершину } i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad (1.8б)$$

Матрицы смежности и инцидентности дают полное описание соответствующих им графов и орграфов. Остановимся на некоторых полезных свойствах этих матриц.

1. Пусть A^k — результат возведения матрицы смежности графа $G(V, E)$ в k-ю степень. Тогда элемент $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A^k равен числу различных маршрутов из вершины i в вершину j длины k (напомним, что под длиной маршрута понимается число образующих его ребер).

2. Ранг матрицы инцидентности R орграфа $G(V, A)$ равен $N - k$, где k — число компонент связности орграфа $G(V, A)$.

3. Определитель любой квадратной подматрицы матрицы инцидентности R орграфа $G(V, A)$ равен -1, 0 или 1.

Последнее свойство имеет многочисленные важные приложения в дискретной оптимизации. Оно называется ***теоремой Гофмана — Краскала***.

Из указанных четырех матриц чаще используются две: матрица смежности неориентированных графов и матрица инцидентности ориентированных графов. Приведем примеры таких матриц.

Пример 1.21. Для графа на рис. 1.6, *а* получаем следующую матрицу смежности:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Пример 1.22. Занумеруем дуги в орграфе на рис. 1.5, *б*, как это показано на рис. 1.14:

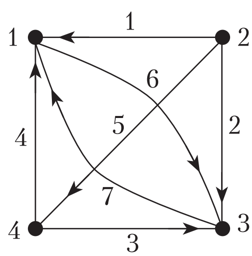


Рис. 1.14. **Орграф с занумерованными дугами**

Для этого орграфа получаем следующую матрицу инцидентности:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

1.3.2. Задание графов и орграфов списками

Во многих случаях, в частности при нахождении компонент связности графа, адекватной структурой данных является следующая. Граф задается в виде массива, i-й элемент которого соответствует вершине i. Сам же i-й элемент является массивом, состоящим из номеров всех вершин, смежных с вершиной i. Заметим, что длина равна степени вершины i. В рамках такой структуры удобно просматривать все вершины, смежные с данной, чем и оправдано их применение. Такое представление графов назовем ***массивом смежных вершин***.

Для орграфов аналогичное представление определяется как массив, i-й элемент которого является массивом номеров всех вершин, в которые ведет дуга с началом в вершине i.

Пример 1.23. Для графа, показанного на рис. 1.15, данное представление имеет следующий вид: $\langle\langle 2, 3, 4\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 2, 4\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 6, 8, 9\rangle, \langle 5, 7, 10\rangle, \langle 6, 8\rangle, \langle 5, 7\rangle, \langle 5\rangle, \langle 6\rangle, \Lambda\rangle$. Обратите внимание на последний (11-й) массив: поскольку вершина 11 изолирована, массив смежных с ней вершин пуст, что и обозначается принятым в таких случаях знаком Λ.

Пример 1.24. Для орграфа, показанного на рис. 1.10, данное представление имеет следующий вид: $\langle\langle 3, 4\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 9\rangle, \langle 5, 7\rangle, \Lambda, \langle 5, 7\rangle, \langle 8, 10\rangle, \langle 6\rangle, \Lambda\rangle$. ■

Граф на рис. 1.15 получен из орграфа на рис. 1.10 «отказом» от ориентации, т.е. заменой всех его дуг на ребра. Сравним массивы из примеров 1.23 и 1.24. Поскольку массивы соответствуют вершинам, то в обоих случаях их число равно 11 — числу вершин в обоих графах. Однако не всякая вершина, смежная с вершиной i, является концом соединяющей их дуги. Например, вершина 6 на рис. 1.11 смежна с вершиной 7, но она не является концом дуги, выходящей из вершины 7, и в соответствии с конструкцией она не входит в массив 7. То же самое относится к вершине 8. Поэтому массив 7 в орграфе оказывается пустым, а в соответствующем ему графе без учета ориентации — не пустым.

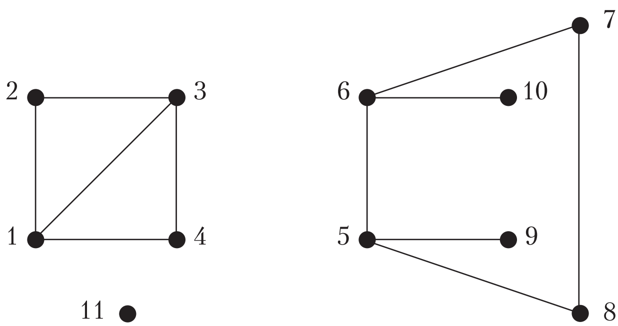


Рис. 1.15. **Неориентированный граф**

Обратим внимание на то, что для неориентированных графов в данном представлении каждое ребро $\{i, j\}$ указывается дважды — элементом ji-го массива и элементом ij-го массива. В случае орграфов каждая дуга указывается ровно один раз. В любом случае такое задание гораздо экономнее, чем задание матрицами, в которых обычно почти все элементы равны нулю.

Рассмотрим применение данной структуры данных для решения одной из самых распространенных задач теории графов — определения их компонент связности (эта задача входит как стандартная часть во многие задачи оптимизации на графах). Будем рассматривать только неориентированный