А.А. Пухальский

Большие уклонения стохастических динамических систем

Теория и приложения

Москва
«Книга по Требованию»

Введение

Задача исследования больших уклонений стохастических динамических систем возникает в ситуации, когда требуется оценить вероятность редкого события, характеризующегося тем, что система не следует своей наиболее вероятной траектории. В качестве одного из приложений можно указать асинхронные сети связи с коммутацией пакетов. Существенным требованием к таким сетям является обеспечение заданного качества обслуживания, например, доля пакетов, потерянных в силу случайного характера трафика, должна быть достаточно мала, скажем, не должна превосходить 10^{-10}. В технической литературе это требование выражается в терминах «эффективной полосы пропускания», необходимой данному соединению. Ввиду малости указанной вероятности и возможности использовать системы массового обслуживания для моделирования систем обработки и передачи информации, естественно исследовать задачу определения эффективной полосы пропускания методами теории больших уклонений стохастических динамических систем.

В предлагаемой вниманию читателя монографии исследуется логарифмическая, или грубая, асимптотика больших уклонений. Более конкретно, речь будет идти о методах установления принципа больших уклонений (ПБУ). Напомним, что если заданы хаусдорфово топологическое пространство E с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}(E)$, функция $\mathbf{I} : E \to [0, \infty]$, называемая функционалом действия и определяемая требованием компактности множеств $\{z \in E : \mathbf{I}(z) \leqslant a\}$ для $a \in \mathbb{R}_+$, направленность $\{P_\phi,\, \phi \in \Phi\}$ вероятностных мер на $(E, \mathcal{B}(E))$ и направленность неотрицательных чисел $\{r_\phi,\, \phi \in \Phi\}$, такая что $r_\phi \to \infty$ при $\phi \in \Phi$, где Φ — направленное множество, то говорят, что направленность $\{\mathbf{P}_\phi,\, \phi \in \Phi\}$ удовлетворяет ПБУ с функционалом действия $\mathbf{I}$ для шкалы r_ϕ, если

$$\limsup_{\phi\in\Phi} \frac{1}{r_\phi} \ln \mathbf{P}_\phi(F) \leqslant -\inf_{z\in F} \mathbf{I}(z) \quad \text{для замкнутых множеств} \quad F \subset E, \tag{0.1а}$$

$$\liminf_{\phi\in\Phi} \frac{1}{r_\phi} \ln \mathbf{P}_\phi(G) \geqslant -\inf_{z\in G} \mathbf{I}(z) \quad \text{для открытых множеств} \quad G \subset E. \tag{0.1б}$$

Классической задачей теории больших уклонений является анализ динамической системы с малым шумом:

$$X_t^\varepsilon = x + \int\limits_0^t b(X_s^\varepsilon)\, ds + \sqrt{\varepsilon}\, B_t, \tag{0.2}$$

где $(B_s,\, s \in \mathbb{R}_+)$ — стандартный винеровский процесс, $b(\cdot)$ — непрерывная ограниченная функция и $\varepsilon \to 0$. Эта задача (и даже более общая) подробно изучалась Венцелем и Фрейдлиным [11], установившими, что ПБУ имеет место в пространстве $\mathbb{C}([0,1])$ функций, непрерывных на $[0,1]$, снабжённом равномерной нормой, для шкалы $1/\varepsilon$ с функционалом действия $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{\mathbf{x}}_t^2\, dt$ для абсолютно непрерывных функций $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ с $\mathbf{x}_0 = x$ и $I(\mathbf{x}) = \infty$ для остальных функций $\mathbf{x} \in \mathbb{C}([0,1])$. Подход Венцеля и Фрейдлина, а также других авторов, занимавшихся вопросами установления ПБУ, состоял в непосредственном получении или оценок, содержащихся в определении (0.1а) и (0.1б), или эквивалентных им верхних и нижних оценок.

В данной книге развивается иной подход, который основан на систематическом использовании соображений компактности и аналогичен методу доказательства слабой сходимости вероятностных мер, опирающемуся на теорему плотности Прохорова. Краеугольным камнем этого подхода является критерий относительной компактности для ПБУ, устанавливающий эквивалентность между относительной компактностью в смысле больших уклонений и экспоненциальной плотностью направленности вероятностных мер. Это даёт возможность получать ПБУ, проверяя экспоненциальную плотность и идентифицируя предельную точку. Удаётся также сделать следующий шаг на пути развития подхода, аналогичного методам теории слабой сходимости, а именно: можно ввести понятие сходимости в смысле больших уклонений, которое равносильно для случая тихоновских пространств понятию ПБУ, и интерпретировать ПБУ для решения (0.2) как сходимость в смысле больших уклонений (или БУ-сходимость) к идемпотентному процессу

$$X_t = \int\limits_0^t b(X_s)\, ds + W_t,$$

где $(W_s,\ s \in \mathbb{R}_+)$ — стандартный винеровский идемпотентный процесс. В результате идентификацию предельных точек можно осуществлять, привлекая методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории оптимизации.

Достоинством предлагаемого подхода является его относительная простота по сравнению с имеющимися методами, выражающаяся в том, что не возникает необходимости установления тонких вероятностных оценок. Вместо этого центр тяжести перемещается на исследование предельных идемпотентных процессов. Таким образом, «стираются случайные черты» допредельных процессов и сохраняются только существенные особенности задачи. Не будет большим преувеличением сказать, что именно предельный идемпотентный процесс, который может возникать из различных допредельных постановок, определяет характер асимптотики больших уклонений. Как следствие, удаётся существенно ослабить предположения, требующиеся для справедливости известных результатов о ПБУ, а также получить целый ряд новых результатов.

Настоящая монография состоит из двух частей. Поскольку методы идемпотентного анализа стали активно развиваться только в последнее время и результаты, требующиеся для развиваемого нами подхода к теории больших уклонений, или имеются только в журнальной литературе, или отсуствуют, то первая часть книги посвящена изложению аппарата идемпотентной теории вероятностей. Как следует из названия, речь идёт об аналоге теории вероятностей. Напомним, что идемпотентные меры — это функции множеств, обладающие свойством «макситивности» в том смысле, что $\mathbf{\Pi}(A \cup B) = \mathbf{\Pi}(A) \vee \mathbf{\Pi}(B)$. Как оказывается, на пространства с идемпотентной мерой можно перенести многие конструкции и методы теории вероятностей. Рассматриваются теоремы о продолжении идемпотентных мер, вопросы измеримости, идемпотентное ожидание и условное идемпотентное ожидание, топологии на пространствах идемпотентных мер и т.д. Проводится также исследование в духе общей теории случайных процессов идемпотентных аналогов моментов остановки, фильтраций, случайных процессов, дифференциальных уравнений Ито, мартингалов и семимартингалов (которые мы называем максингалами и семимаксингалами, соответственно) и мартингальных проблем (называемых максингальными проблемами).

Во второй части книги содержатся результаты о больших уклонениях семимартингалов и их приложения к анализу стохастических динамических систем. Приведём используемое нами определение сходимости в смысле больших уклонений (или БУ-сходимости). Функционалу действия $\mathbf{I}$ на E ставится в соответствие идемпотентная мера $\mathbf{\Pi}$, определённая равенством $\mathbf{\Pi}(A) = \sup_{z \in A} \exp(-\mathbf{I}(z))$. Она рассматривается как предел вероятностных мер в ПБУ и по этой причине называется «уклонимостью». Скажем, что направленность вероятностных мер $\mathbf{P}_\phi$ сходится в смысле больших уклонений (или БУ сходится) к уклонимости $\mathbf{\Pi}$ (со скоростью r_ϕ), если имеет место равенство

$$\lim_{\phi\in\Phi}\Big(\int\limits_E h(z)^{r_\phi}\,d\mathbf{P}_\phi(z)\Big)^{1/r_\phi} = \sup_{z\in E} h(z)\mathbf{\Pi}(z) \tag{0.3}$$

для всех $\mathbb{R}_+$-значных ограниченных непрерывных функций h на пространстве E. Для общих хаусдорфовых пространств свойства (0.1а) и (0.1б) являются более сильными, чем (0.3). Однако для тихоновских пространств, которые в основном будут рассматриваться и которые достаточны для конкретных постановок теории больших уклонений, эти два определения эквивалентны. Преимущество использования определения (0.3) состоит в том, что многие доказательства при этом значительно упрощаются (это, отчасти, объясняется тем, что как допредельные, так и предельный объекты являются нормами). Общие свойства БУ-сходимости в форме (0.3) изучаются в гл. 3, где используемые методы аналогичны подходам теории слабой сходимости мер и идемпотентных мер. В частности, устанавливаются принцип непрерывных отображений, аналог критерия компактности Прохорова, вводятся метрики для БУ-сходимости на метрических пространствах. Для пространства Скорохода формулируются конструктивные условия экспоненциальной плотности.

Основное содержание гл. 4, 5 составляют результаты о БУ-сходимости распределений семимартингалов с траекториями в пространстве Скорохода. Здесь нам удаётся применить подходы, аналогичные используемым для доказательства сходимости по распределению семимартингалов, а именно идентифицировать БУ предельные точки через конечномерные распределения и как решения максингальной проблемы. Результаты имеют форму БУ-сходимости по распределению семимартингалов к семимаксингалам. Рассматриваются применения к большим уклонениям стохастических динамических систем, моделируемых семимартингалами.

В заключительной главе части II изучаются большие уклонения в системах и сетях массового обслуживания. Мы приводим результаты двух типов — о больших уклонениях в узком смысле и об умеренных уклонениях. Также исследуется асимптотика инвариантных мер. В приложении доказаны некоторые технические результаты, использованные в основном изложении, приведены дополнительные комментарии и ссылки на литературу.

Автор выражает признательность Институту проблем передачи информации и издательству “Физматлит” за консультации и помощь в подготовке рукописи к печати.

Основные обозначения

п.в.	–	почти всюду
$\mathbb{R}_+$	$=$	$[0,\infty)$
$\overline{\mathbb{R}}_+$	$=$	$[0,\infty]$
$a \vee b$	–	максимум чисел a и b
a^+	$=$	$a \vee 0$
$a \wedge b$	–	минимум чисел a и b
$\lfloor a \rfloor$	–	целая часть числа a
$\mathbf{e}$	$=$	$(t,\, t \in \mathbb{R}_+)$
$f \circ g$	–	композиция функций f и g
$\mathbb{N}$	–	множество натуральных чисел
$\mathbb{Z}_+$	–	множество неотрицательных целых чисел
$x \cdot y$	–	скалярное произведение векторов x и y
$\lvert x \rvert$	–	евклидова норма вектора x
I_d	–	единичная матрица размера $d \times d$
σ^T	–	матрица, сопряжённая матрице σ
$\lVert\sigma\rVert$	–	операторная норма матрицы σ, соответствующая евклидовой норме
$\sigma^{\oplus}$	–	матрица, псевдо-обратная матрице σ
A^c	–	дополнение множества A
A^B	–	семейство всех функций из множества B в множество A
$\mathcal{P}(A)$	–	семейство всех подмножеств множества A
$\mathbf{1}(A)$, $\mathbf{1}_A$	–	индикатор множества A
$\operatorname{int} A$	–	внутренность подмножества A топологического пространства
$\operatorname{cl} A$	–	замыкание подмножества A топологического пространства
$\mathcal{B}(E)$	–	борелевская σ-алгебра на топологическом пространстве E
$\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_+)$	–	лебеговская σ-алгебра на $\mathbb{R}_+$
$\overline{\mathcal{B}}\big([0,t]\big)$	–	лебеговская σ-алгебра на $[0,t]$

Часть I

ТЕОРИЯ ИДЕМПОТЕНТНОСТЕЙ

Глава 1

ИДЕМПОТЕНТНЫЕ МЕРЫ

В этой главе вводятся идемпотентные аналоги некоторых основных объектов теории вероятностей, таких как вероятностная мера, случайная величина, математическое ожидание, условная вероятность, условное математическое ожидание, и изучаются их свойства.

§ 1.1. Теорема о продолжении, τ-алгебры

В этом параграфе даётся определение идемпотентной меры. Доказывается теорема о продолжении. Кроме того, вводятся идемпотентные аналоги измеримого и вероятностного пространств.

Пусть Υ — некоторое множество и $\mathcal{J}$ — некоторое семейство подмножеств Υ, содержащее $\varnothing$. Символы Φ и Ψ будут использоваться для обозначения направленных множеств, а J — для обозначения произвольного множества индексов.

Определение 1.1.1. *Функция множеств $\mu : \mathcal{P}(\Upsilon) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ называется идемпотентной мерой на Υ, если имеют место следующие условия:*

(μ0) $\mu(\varnothing) = 0$,

(μ1) $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$,

(μ2) $\mu\big(\bigcup_\phi A_\phi\big) = \sup_\phi \mu(A_\phi)$

для любой возрастающей направленности $\{A_\phi,\, \phi \in \Phi\}$ подмножеств Υ.

Если, дополнительно,

(П) $\mu(\Upsilon) = 1$,

то идемпотентная мера называется идемпотентной вероятностной мерой или, для краткости, идемпотентностью и обозначается как $\mathbf{\Pi}$.

Если, в дополнение к (μ0), (μ1) *и* (μ2),

(μ3) $\mu\big(\bigcap_\phi F_\phi\big) = \inf_\phi \mu(F_\phi)$

для каждой убывающей направленности $\{F_\phi,\, \phi \in \Phi\}$ элементов $\mathcal{J}$, то скажем, что идемпотентная мера является τ-гладкой относительно $\mathcal{J}$, или, более кратко, является $\mathcal{J}$-идемпотентной мерой.

Замечание 1.1.2. *На протяжении всей книги термины «возрастающий» и «убывающий» используются в смысле «неубывающий» и «невозрастающий» соответственно.*

Замечание 1.1.3. *Из свойства* $(\mu 1)$ *следует, что* μ *является возрастающей и субаддитивной функцией множеств, т.е.* $\mu(A) \leqslant \mu(B)$, *если* $A \subset B$ *и* $\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$.

Следующая характеризация идемпотентных мер непосредственно следует из определения.

Лемма 1.1.4. *Условия* $(\mu 1)$ *и* $(\mu 2)$ *эквивалентны следующему условию*:

$$\mu\Bigl(\bigcup_{j\in J} A_j\Bigr) = \sup_j \mu(A_j) \tag{1.1.1}$$

для любого семейства $\{A_j,\, j \in J\}$ *подмножеств* Υ, *которое, в свою очередь, эквивалентно представлению*

$$\mu(A) = \sup_{\upsilon\in A} \mu(\{\upsilon\}), \quad A \subset \Upsilon. \tag{1.1.2}$$

Функция $\mu(\{\upsilon\})$ называется плотностью идемпотентной меры μ. Свойство $(\mu 2)$ также будем называть τ-гладкостью относительно возрастающих направленностей (в отличие от просто τ-гладкости, которая касается убывающих направленностей элементов $\mathcal{J}$), а свойство (1.1.1) — τ-макситивностью. Для функций множеств, которые определены только на некоторых подмножествах Υ, будет использоваться похожая терминология, которая вводится следующим определением.

Определение 1.1.5. *Функция множеств* $\mu : \mathcal{J} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *называется макситивной* (*соответственно,* τ-*макситивной*) *на* $\mathcal{J}$, *если* $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$ *для всех* $A \in \mathcal{J}$ *и* $B \in \mathcal{J}$, *таких что* $A \cup B \in \mathcal{J}$ (*соответственно,* $\mu\bigl(\bigcup_{j\in J} A_j\bigr) = \sup_{j\in J} \mu(A_j)$ *для всех семейств множеств* $A_j \in \mathcal{J}$, $j \in J$, *таких что* $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{J}$).

Для семейства $\mathcal{J}$ обозначим $\mathcal{J}_u$ (соответственно, $\mathcal{J}_i$) семейство произвольных объединений (соответственно, пересечений) элементов $\mathcal{J}$. Если конечные объединения (соответственно, пересечения) множеств из $\mathcal{J}$ принадлежат $\mathcal{J}$, то мы можем считать (и часто это делаем), что множества в бесконечном объединении (соответственно, пересечении) элементов $\mathcal{J}$ образуют возрастающую (соответственно, убывающую) направленность относительно направленного множества. Обозначим также $\mathcal{J}_{iu} = (\mathcal{J}_i)_u$ и заметим, что это множество совпадает с множеством $\mathcal{J}_{ui} = (\mathcal{J}_u)_i$. Семейство $\mathcal{J}_{iu}$, очевидно, замкнуто относительно образования произвольных объединений и пересечений.

Напомним следующие определения.

Определение 1.1.6. *Семейство* $\mathcal{J}$ *подмножеств* Υ *называется покрытием на* Υ, *если оно содержит* $\varnothing$ *и замкнуто относительно образования конечных объединений и пересечений. Семейство* $\mathcal{J}$ *подмножеств* Υ *называется* π-*системой, если оно замкнуто относительно образования конечных пересечений.*

В следующей лемме показано, что если μ является идемпотентной мерой, τ-гладкой относительно покрытия $\mathcal{J}$, то значения μ на $\mathcal{J}_{iu}$ однозначно определяются её значениями на $\mathcal{J}$. Следовательно, существует не более одного продолжения μ с $\mathcal{J}$ на $\mathcal{J}_{iu}$.

Теорема 1.1.7. *Пусть $\mathcal{J}$ — π-система, содержащая $\varnothing$, и μ — $\mathcal{J}$-идемпотентная мера. Тогда*

$$\mu(A) = \sup_{B\in\mathcal{J}_i:\,B\subset A} \mu(B), \quad A \in \mathcal{J}_{iu},$$

$$\mu(B) = \inf_{F\in\mathcal{J}:\,F\supset B} \mu(F), \quad B \in \mathcal{J}_i.$$

Утверждение вытекает из τ-макситивности и τ-гладкости μ, а также того обстоятельства, что каждое множество из $\mathcal{J}_i$ является пересечением убывающей направленности элементов $\mathcal{J}$.

Следующий простой факт находит применение в теоремах о продолжении (см. теорему 1.1.9 ниже). Приводимое доказательство показывает ход типичных рассуждений.

Лемма 1.1.8. *Если идемпотентная мера μ является τ-гладкой относительно π-системы $\mathcal{J}$, содержащей $\varnothing$, то она также является τ-гладкой относительно $\mathcal{J}_i$.*

Доказательство. Пусть $\{A_\psi,\, \psi\in\Psi\}$ — убывающая направленность элементов $\mathcal{J}_i$, т.е. $A_\psi = \bigcap_{\phi\in\Phi_\psi} F_{\psi\phi}$, где $F_{\psi\phi}\in\mathcal{J}$. Пусть Δ — семейство конечных последовательностей $\delta = \{(\psi_{i_1}\phi_{i_1}), (\psi_{i_2}\phi_{i_2}), \ldots, (\psi_{i_k}\phi_{i_k})\}$, где $\psi_{i_j}\in\Psi$, $\psi_{i_1}\leqslant\psi_{i_2}\leqslant\ldots\leqslant\psi_{i_k}$ и $\phi_l\in\Phi_{\psi_l}$ для $l = i_1, i_2, \ldots, i_k$. Скажем, что $\delta\leqslant\delta'$, если все пары $(\psi\,\phi)$, которые встречаются в δ, также содержатся в δ'. Для $\delta\in\Delta$ положим $B_\delta = \bigcap_{(\psi\phi)\in\delta} F_{\psi\phi}$. Тогда Δ — направленное множество и $\{B_\delta, \delta\in\Delta\}$ — убывающая направленность. Кроме того, $B_\delta\in\mathcal{J}$ и $\bigcap_{\psi\in\Psi} A_\psi = \bigcap_{\delta\in\Delta} B_\delta$. Таким образом, поскольку μ является $\mathcal{J}$-идемпотентной мерой,

$$\mu\Big(\bigcap_{\psi\in\Psi} A_\psi\Big) = \inf_{\delta\in\Delta} \mu(B_\delta). \tag{1.1.3}$$

Поставим в соответствие данной последовательности $\delta = \{(\psi_{i_1}\phi_{i_1}), (\psi_{i_2}\phi_{i_2}), \ldots, (\psi_{i_k}\phi_{i_k})\}$ некоторый элемент $\psi_\delta\in\Psi$, такой что $\psi_\delta\geqslant\psi_{i_j}, j = 1,\ldots,k$. Тогда, в силу того что $\{A_\psi,\, \psi\in\Psi\}$ является убывающей направленностью, имеем, что $B_\delta\supset A_{\psi_\delta}$; следовательно,

$$\mu(B_\delta)\geqslant\mu\big(A_{\psi_\delta}\big)\geqslant\inf_{\psi\geqslant\psi_\delta}\mu(A_\psi) = \inf_{\psi\in\Psi}\mu(A_\psi).$$

Итак, ввиду (1.1.3)

$$\mu\Big(\bigcap_{\psi\in\Psi} A_\psi\Big)\geqslant\inf_{\psi\in\Psi}\mu(A_\psi). \qquad \square$$

Перейдём к рассмотрению вопроса о продолжении функций множеств до идемпотентных мер.

Теорема 1.1.9. *Пусть $\mathcal{J}$ — покрытие на Υ. Пусть μ — $\overline{\mathbb{R}}_+$-значная макситивная функция на $\mathcal{J}$, такая что $\mu(\varnothing) = 0$.*

1. *Функция множеств μ допускает продолжение до идемпотентной меры μ^* на Υ, если и только если она является τ-гладкой по отношению к возрастающим направленностям, т.е. для любой возрастающей направленности $\{F_\phi\}$ элементов $\mathcal{J}$, объединение которых принадлежит $\mathcal{J}$, выполнено равенство*
$$\mu\Bigl(\bigcup_\phi F_\phi\Bigr) = \sup_\phi \mu(F_\phi).$$
Это продолжение однозначно определяется на $\mathcal{J}_u$.
2. *Функция множеств μ допускает продолжение до $\mathcal{J}$-идемпотентной меры μ^*, если и только если выполняется следующее условие.*

   (S) *Если $\{F_{1,\phi}\}$ и $\{F_{2,\psi}\}$ — соответственно возрастающая и убывающая направленности элементов $\mathcal{J}$, такие что*
$$\bigcup_\phi F_{1,\phi} \supset \bigcap_\psi F_{2,\psi},$$
то
$$\sup_\phi \mu(F_{1,\phi}) \geqslant \inf_\psi \mu(F_{2,\psi}).$$

Идемпотентная мера μ^* является тогда также τ-гладкой относительно $\mathcal{J}_i$ и однозначно определяется на $\mathcal{J}_{iu}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала утверждение части 1. Необходимость приводимого условия очевидна. Докажем достаточность. Заметим сначала, что ввиду макситивности μ и того обстоятельства, что $\mathcal{J}$ замкнуто относительно образования конечных объединений, условие τ-гладкости относительно возрастающих направленностей влечёт за собой τ-макситивность μ на $\mathcal{J}$. Положим для $\upsilon \in \Upsilon$
$$\mu^*(\{\upsilon\}) = \inf_{F\in\mathcal{J}:\, \upsilon\in F} \mu(F) \tag{1.1.4}$$
и для $A \subset \Upsilon$
$$\mu^*(A) = \sup_{\upsilon\in A} \mu^*(\{\upsilon\}). \tag{1.1.5}$$
Очевидно, что $\mu^*(A)$ является идемпотентной мерой. Покажем, что μ^* совпадает с μ на $\mathcal{J}$. Пусть $F \in \mathcal{J}$. В силу (1.1.4) $\mu^*(\{\upsilon\}) \leqslant \mu(F)$, если $\upsilon \in F$. Поэтому ввиду (1.1.5) $\mu^*(F) \leqslant \mu(F)$. Обратно, пусть задано $\varepsilon > 0$. Для $\upsilon \in F$ выберем множество $F^\upsilon \in \mathcal{J}$ так, что $\upsilon \in F^\upsilon$ и $\mu^*(\{\upsilon\}) \geqslant \mu(F^\upsilon) - \varepsilon$. Тогда в силу (1.1.5) $\mu^*(F) \geqslant \sup_{\upsilon\in F} \mu(F^\upsilon) - \varepsilon$.