

Глава 1

Не бойтесь больших чисел,

или

Шесть молекул Гёте

*Математика как раздел науки настолько серьезна,
что не следует упускать возможности
сделать ее более увлекательной.*

Блез Паскаль (1623–1662)

Предание сохранило для нас последние слова Иоганна Вольфганга Гёте.

— Больше света! — воскликнул великий немецкий поэт и вздохнул в последний раз.

Последний выдох Гёте — наверняка бесценное сокровище для поклонников тайного советника (не столь аппетитное для других). Но куда же оно подевалось? Содержится ли в том воздухе, которым мы дышим здесь и сейчас, хоть одна молекула, которую когда-то выдохнул Гёте? Может быть, даже молекула из его последнего выдоха?

Раздумья над этим вопросом располагают к философии — или к подсчетам. Последнее мало кому придет в голову, хотя все не так сложно, если знать парочку основополагающих численных значений. Некоторые из вас, вероятно, припоминают, что в школе проходили такую величину — моль. Один моль вещества — это $6 \cdot 10^{23}$ молекул, то есть 600 000 000 000 000 000 000 000 молекул. Такие величины потребуются нам для мира этих крошечных кирпичиков материи.

Для всех газов верно условие: один моль газа при нормальном атмосферном давлении занимает объем примерно 25 литров. Один выдох (например, последний выдох Гёте) составляет около литра, то есть содержит $1/25$ моля, или около $2,4 \cdot 10^{22}$ молекул. В среднем мы дышим около 20 раз в минуту, что за 83 года (столько прожил Гёте) составляет $20 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 83 = 872\,469\,000$

выдохов или $2 \cdot 10^{31}$ молекул (здесь, конечно, содержится сильное упрощение — наверняка Гёте выдыхал многие молекулы не по одному разу, особенно ночью при закрытом окне).

Можно считать, что со дня смерти Гёте воздух в атмосфере хорошо перемешался, и поэтому в каждом литре воздуха содержится примерно одинаковое число Гёте-молекул. Сколько всего воздуха на земле? Я где-то читал, что масса атмосферы составляет $5 \cdot 10^{21}$ граммов. Один моль воздуха весит примерно 30 граммов. Получается, что весь воздух — это $5 \cdot 10^{21} : 30 = 1,7 \cdot 10^{20}$ моль или 10^{44} молекул — невообразимо огромное количество.

Теперь у нас есть все необходимые данные для окончательного подсчета: разделим число всех молекул воздуха на число Гёте-молекул и получим, что примерно одна из $5 \cdot 10^{12}$ (5 триллионов) молекул когда-то выдыхалась Гёте, а одна из $4 \cdot 10^{21}$ участвовала даже в его последнем выдохе. Мы, как и Гёте, за один раз выдыхаем примерно $2,4 \cdot 10^{22}$ молекул, среди них находится около 5 миллиардов молекул, которыми дышал Гёте, и 6 из его последнего выдоха перед смертью. В среднем. Похожим образом, кстати, можно подсчитать число молекул в стакане воды, которые когда-то прошли через тело Гёте.

Шесть молекул из последнего выдоха Гёте в каждом литре воздуха, которым мы дышим! Сразу поневоле проникаешься уважением к дыханию. Конечно, весь подсчет крайне неточен, ведь я делал очень грубые оценки и на каждом шаге округлял вверх или вниз. Но это и несущественно — чтобы понять, насколько вероятно, что мы дышим Гёте-молекулами, важен только порядок величины. И теперь, когда ответ очевиден, не важно, сколько точно таких молекул содержится в литре воздуха: 6, 2 или 20.

Разумеется, изученный вопрос не имеет практического применения, но, оперируя такими величинами, можно выработать навыки работы с большими числами. А эти навыки нужны всем, хотя бы в тех случаях, когда речь идет о деньгах. Ведь потратить 100 или 10 000 евро — это далеко не одно и то же. А между тем один из министров экономики однажды на вопрос журналиста, сколько нулей в миллиарде, принялся гадать: «О Боже мой! Семь? Восемь?». Девять, господин Бангеманн!

Конечно, когда на тебя направлена камера или микрофон, легко потеряться. В такой ситуации каждый имеет право на разду-

мья. Но многие политики, видимо, действительно этого не знают. А ведь они каждый день решают судьбы сумм с семью, восемью или девятью нулями. В новостях нас постоянно бомбардируют сообщениями, в которых фигурируют миллиарды, но лишь немногие люди по-настоящему чувствуют, как это много — один миллиард. Психологи исследовали отношение человека к деньгам и установили, что до 500 000 (тогда еще марок) люди действительно представляют себе размер суммы (на вопрос, что на эти деньги можно купить, они отвечают «собственный дом»), но при больших суммах представление исчезает. Так что когда министр борется за бюджет в 21 миллиард евро в новом году, потому что в прошлом году у него был бюджет в 20 миллиардов, вполне допустимо сомневаться, что он представляет себе, сколько это денег. Но хотя представить себе такие большие числа и невозможно, тренироваться в обращении с ними очень полезно, и не только министрам, — для того, чтобы иметь возможность хотя бы грубо оценить их величину, сравнивая с другими большими числами. Подсчеты с ними на самом деле так же просты, как и с небольшими числами, в чем мы убедились на примере с Гёте. При этом очень помогают степени (см. с. 189).

Вот пример из области финансов. Предположим, глава совета директоров банка Deutsche Bank Иосиф Акерманн работает за компьютером и вдруг замечает, что перед дверью его комнаты кто-то обронил банкноту в 5 евро. Стоит ли господину Акерманну встать и поднять купюру, если он не получает деньги за то время, что не сидит за компьютером (это, конечно же, чепуха)? Собственно, вопрос стоит так: сколько времени Акерманн работает за 5 евро? Попробуйте это прикинуть, прежде чем вычислять!

В 2006 г. Акерманн заработал примерно 12 миллионов евро. Если считать (в его пользу!), что он работал 60 часов в неделю, и притом без отпуска, то при 52 неделях работы получается зарплата примерно в 3846 евро за час. Округляя, получим 3600 евро в час, то есть Акерманн зарабатывает один евро каждую секунду. Чтобы поход за пятиевровой банкнотой оправдался, он должен занять не более 5 секунд. Поторопитесь, господин директор!

Еще одно сравнение, показывающее, как много зарабатывают наши менеджеры высшего звена: проработав 345 секунд (около шести минут), господин Акерманн зарабатывает столько, сколько имеет в месяц получатель пособия по безработице в Германии

Харц IV, а именно 345 евро. Кстати о пособии Харц IV: попробуйте оценить, скольким людям можно было бы год платить пособие по безработице из денег, которые стоит один боевой самолет Еврофайтер: 180, 1800 или 18 000?

Каждый Еврофайтер обходится налогоплательщикам в 75 миллионов евро. Поделив на размер пособия и на 12 (месяцев), получаем примерно 18 000. Примерно столько человек получают пособие по безработице в небольшом городе вроде Бохума. Ну хорошо, это нельзя сравнивать, такой самолет тоже нужен. Но Германия заказала не один такой самолет, а 180.

Конечно, можно политически аргументировать, что данный расчет — сплошная демагогия и мы сравниваем яблоки с грушами. Что эти самолеты необходимы для обороны и их цена оправданна. Это может быть и верно — но расчет верен тоже. И тот, кто настаивает на таких расходах, должен обосновать их не только качественно («нам это необходимо, потому что...»), но и количественно, чтобы убедить нас: мы можем себе эти расходы позволить. И яблоки с грушами ему все же придется сравнивать, ведь каждый евро может быть израсходован только один раз.

Не бойтесь неточности

Возьмем другой пример. Представьте себе такую игру: столб высотой 2 метра и шириной 2 сантиметра установлен где-то на обочине автострады Гамбург–Берлин. У вас нет ни малейшего представления, где именно. Ночью вы едете по автостраде, и у вас есть пистолет. В какой-то момент, когда хотите, вы опускаете боковое стекло и стреляете в сторону обочины. Если попадете в столб, вы выиграли.

Заплатите ли вы за право участия в этой игре хотя бы евро, даже если в случае выигрыша вам обещают миллион? Нет? Между тем миллионы людей делают это каждую неделю, играя в лото. Шанс угадать шесть номеров правильно такой же, как и шанс ночью попасть в столб на обочине дороги: около 1 к 14 миллионам. Желаю удачи!

Наша интуиция мало помогает нам в обращении с вероятностями. В зависимости от постановки задачи легко переоценить или, наоборот, недооценить шансы. В конце концов, помогает лишь одно: расчеты, хотя бы и приблизительные.

В школе от нас требовали считать точно. На вопрос «Сколько будет 7 умножить на 14?» недостаточно было ответить «Примерно 100!», учительница хотела услышать точный ответ, а именно 98.

Однако для большинства практических случаев 7 умножить на 14 — это 100, число π равно 3 (вместо 3,14...), а ускорение свободного падения — 10 м/с^2 (вместо 9,81...). Точные значения нужны лишь тогда, когда важны мелкие детали. Например, в спорте мало знать, что кто-то пробежал 100 метров «примерно за 10 секунд» — там между 9,8 и 10,4 секундами лежит пропасть. Но при оценке по порядку величины точность обычно бывает обманчивой. Статистик Вальтер Крамер приводит пример таблиц¹ из одной британской публикации, сравнивающей гражданские жертвы Второй мировой войны:

Гражданские жертвы: союзники	
Великобритания	60 595
Бельгия	90 000
Китай	очень много
Дания	неизвестно
Франция	152 000
Нидерланды	242 000
Норвегия	3638
СССР	6 000 000

	6 548 233

Гражданские жертвы: противник	
Германия	500 000
Австрия	125 000
Италия	180 000
Япония	600 000
Польша	5 300 000
Югославия	много

	6 705 000

¹ Данная таблица приводится в авторской редакции, в исторической науке принята иной подход к делению стран на союзников и противников и к определению числа жертв. — *Прим. ред.*

Первая таблица, например, полностью бессмысленна, так как в ней точные цифры (для Норвегии) смешаны с приближительными (для Бельгии) и даже полностью отсутствующими (для Дании). При сложении таких чисел результат может показаться разумным, но он наверняка неверен.

Поэтому не бойтесь неточности, если порядок величины точен. Тогда вы ценой нескольких упражнений сумеете справиться с большими числами.

Теперь ваша очередь. На Земле живет 6,5 миллиардов человек. Если бы они все стояли рядом, прижавшись друг к другу так же плотно, как на рок-концерте, то хватило бы им места на Боденском озере? Сначала оцените и только потом подсчитайте! Площадь Боденского озера составляет 536 квадратных километров.

Решение на сайте www.rowolt.de/mathematikverfuehrer!

Глава 2

Убийца на автозаправке, или Условно вероятный преступник

За два часа новость облетела маленький городок на Рейне. «Вы уже слышали про Ингу Херкенбуш? Такая милая девочка!» На следующее утро местная газета выходит под заголовком «Последний клиент платит убийством».

Поздним утром газету читают на заседании следственного комитета по убийствам. Детлеф Бенке, председатель комитета, вытирает этой газетой кофе, который убежал из кофейного автомата. Теперь страницы газеты приятней нюхать, чем читать.

Каждый сотрудник докладывает о своих результатах. В 20 часов Инга Херкенбуш, 28 лет, начинает свою ночную смену на заправочной станции на шоссе B91. Смена должна была закончиться в 4 часа утра. Оживленное шоссе — любимая альтернатива автобану — проходит в прямой видимости от города. В 2 часа 15 минут очередной водитель хочет оплатить 50 литров бензина марки «Супер плюс», но на заправке никого нет. Только подойдя через 2–3 минуты к кассе, он видит труп по ту сторону прилавка и вызывает полицию по сотовому телефону.

Жертва была задушена. Касса оказалась пустой. Водитель, который обнаружил жертву, в присутствии сотрудников полиции поторопился опустошить свои карманы. Он хотел доказать свою невиновность, но при этом мог уничтожить важные улики. Разгорелся спор с полицией, и водитель употребил несколько крепких выражений, которые один из полицейских расценил как оскорбление. Началось расследование.

— Ближе к делу, — призывает комиссар Бенке.

В кассовом автомате Инга Херкенбуш с начала смены сохранила 34 записи о покупках. 28 из них — это плата за заправку,

в том числе один раз за природный газ. Остальное — продукты, сладости (10 упаковок драже «Ментос» с фруктовым вкусом!) и сигареты. 20 раз оплата производилась с помощью банковской карты, сейчас все это проверяется. Последняя запись была сделана в 1 час 3 минуты.

Если убийца заправлялся на этой станции, он может находиться уже в сотнях километров отсюда или даже за границей. А если он покупал сигареты? Тогда он может жить поблизости.

— Чисто академическая дискуссия, — прерывает Бенке своего сотрудника. — Где это видано, чтобы убийца перед убийством исправно расплачивался?

Экспертиза показала, что все отпечатки пальцев на месте преступления принадлежат жертве, сотруднику полиции, а также тому незадачливому водителю. Когда члены комитета уже начали расходиться, в комнату для заседаний вошел младший комиссар Хуфнагель. В правой руке у него кружка с надписью «I Love Justice». Хуфнагель расследует семейное окружение погибшей Херкенбуш. У нее захламленная («восемь подушек на диване!») и душная квартира. Ее парень на четыре года моложе ее и очень худой, он в шоке, и допросить его пока невозможно.

— Положил бы подушки перед диваном, а не на него, было бы не так больно падать в обморок, — комментирует Хуфнагель без всякой жалости. Перед тем как упасть в обморок, парень успел сообщить, что прошлым вечером Инга, как обычно, поехала на работу на своем опеле. Ей никто не угрожал, и никаких проблем у нее не было.

— Они вели жизнь супругов со стажем, — рассказывает Хуфнагель, — без взлетов и падений, без драм, без амбиций, без фантазии.

— Это только обложка, за которой могут скрываться пропасти, — утверждает коллега Бенц. Она хорошо знает такие ситуации, сама выросла в подобной семье.

Все соседи сообщают о жертве убийства только хорошее. Любовник на стороне? Невозможно. Долги? Темные делишки? Кто угодно, только не Инга.

Подчиненные комиссара Бенке расходятся, а сам он ожидает результата судебного вскрытия. После полудня объявляется Хорст Шлехтер, давний друг комиссара.

— И плохим людям иногда везет, — радуется Хорст по телефону. — Я попал в точку. До изнасилования дело не дошло, жертва защищалась, отчаянно защищалась. Под ногтями мы нашли кровь, достаточно для анализа ДНК.

— Хорст, я уже говорил тебе, что твоим звонкам я радуюсь больше всего?

— Подожди, сейчас самое главное. Я сравнил полученный результат анализа с нашей общенемецкой картотекой сексуальных преступников.

— Есть попадание?

— Точно! Маттиас Бернсдорф, 43 года, судим за изнасилование. Сидел пять лет, вышел на свободу два года назад. Ты плачешь от радости?

— Заплачу, когда будет адрес.

Оказалось, что Маттиас Бернсдорф зарегистрирован в Кельне. По дороге младший комиссар вздох рассказывает коллеге о телесериалах «CSI». Он знает все три сериала практически наизусть и пространно объясняет, почему сериал из Лас-Вегаса ему нравится больше всего. Из любимых сыщиков он «собрал» собственную версию команды CSI, причем она получилась чисто женская.

— Это больше походит на эротический триллер, — вставляет Бенке, слушающий без всякого интереса.

Младший комиссар не считает это недостатком.

— Я люблю, когда все сходится вместе, — восторгается он. — С одной стороны старое доброе расследование с кулаками, а с другой — лаборатория с голубым освещением, пипетками и штрих-кодами. Справедливость — это замечательно.

Он горячо защищает идею собрать ДНК всех немцев, а если надо, то заставить сделать это по закону. Один волос, кусочек перхоти, капля крови или спермы на месте преступления, и компьютер сразу выплюнет имя преступника. Бенке не разделяет восторгов молодого коллеги, но держит свои сомнения при себе. Ему трудно дискутировать с фанатиками прогресса.

Обычный поселок в пригороде, обычный многоэтажный дом, да и сам Маттиас Бернсдорф вполне обычен. Тренировочный костюм, шлепанцы, работающий телевизор, беспорядок в квартире, запах пива. Обстановка явно не для светской беседы, и комиссар сразу переходит к делу:

— Где вы были вчера ночью между нулем и двумя часами?

— Вы имеете в виду, после того, как я вышел из оперы, и до того, как приехал в казино? — недобро усмехается Бернсдорф. — Где же следует быть такому, как я? С судимостью за изнасилование найти друзей почему-то трудно. А на Харц IV¹ особо не попрыгаешь.

— Может ли это кто-нибудь подтвердить? — спрашивает комиссар. — В противном случае прошу проследовать за нами в отделение.

— Может быть, вы мне сначала сообщите, в чем меня подозревают?

— Вы подозреваетесь в том, что вчера вечером на автостоянке в Гревесрате убили кассиршу, Ингу Херкенбуш.

Бернсдорф поражен. Или притворяется?

— Гревесрат? Да я там никогда не был! — протестует он. Вахмистр делает шаг вперед, но Бернсдорф не оказывает никакого сопротивления. Лязгают наручники. В пути задержанный говорит: «Давненько я не сиживал в таком шикарном автомобиле».

Комиссар Бенке — хороший следователь, а хороший следователь умеет доверять своим ощущениям. И теперь ощущения подсказывают ему, что удивление Бернсдорфа было искренним. К ощущениям добавляется рациональный аргумент: этот человек с пивным брюшком никогда не был судим за кражу или грабеж. Жертвой изнасилования была его знакомая, девушка 17 лет. «Почерк» его преступления не подходит к убийству на заправной станции.

После того как Бенке доставил Бернсдорфа, он снова посетил своего друга Шлехтера. Судмедэксперт триумфально размахивает своим докладом:

— Если так пойдет и дальше, вы скоро станете не нужны, — громогласно кричит он.

Бенке перелистывает страницы доклада и бормочет:

— Конечно, я застываю в восхищении перед силой стольких научных доказательств. Но ты знаешь, я не уверен на 100 процентов.

Позади Шлехтера стоит кофейный автомат. Швейцарское производство, четырехзначная цена. Бенке заставляет себя не смотреть туда. Зависть — сильное чувство.

¹ Пособие по безработице, см. гл. 1. — *Прим. перев.*

— Этот тест фирмы «Бионконвикт», который мы используем с недавнего времени, просто изумителен, — восхищенно говорит Шлехтер.

— Эта фирма производит и кофейные автоматы?

— Кофейные автоматы? Нет, насколько я знаю, нет.

— Тогда продолжай.

— Если две пробы обладают одинаковыми ДНК-профилями, тест практически наверняка распознает это. И наоборот, если профили различны, то тест показывает совпадение только в 0,001 процента всех случаев — это означает один из 100 000.

— Впечатляет, — отвечает Бенке. — Однако ты все время говоришь о ДНК-профиле. А разве не могут два человека иметь идентичные профили? Как бы мы не упрятали за решетку невиновного.

— Это действительно бывает, — признает Шлехтер, — но очень редко. Вероятность того, что ДНК-профиль какого-либо мужчины совпадет с пробой, взятой с места преступления, составляет около 0,0001 процента, то есть один из миллиона. Нет-нет, ты можешь быть стопроцентно уверен, что мы арестовали того, кого надо. Ну, хорошо, пусть не 100 процентов, а, скажем, 99,99 процентов и еще пару девяток после запятой.

Статистика или работа полиции?

Все же Бенке убежден не до конца. И сомневаться ему действительно стоит: ведь на самом деле поразительные цифры судмедэксперта — не более чем статистическая фикция. Из «почти» сто-процентной вероятности совпадения не следует «почти» ничего. Дело в том, что отсутствует еще одна важная величина, которая заставляет взглянуть на успех розыска в новом свете. Сейчас мы с этим разберемся, а поможет нам простой пример из полицейской практики, который тоже связан с «условной вероятностью». В чужом городе ночью турист наблюдает, как таксист повреждает стоящий на стоянке автомобиль и скрывается с места преступления. Турист идет в полицию и говорит, что он видел синее такси. В городе всего две службы такси, одна с синими, а другая с зелеными машинами, поэтому подозрение сразу же падает на водителя из службы с синими такси. Но полицейские хотят знать, могут ли они доверять свидетелю: ведь было темно, а в темноте легко

[. . .]